கணிதம்

தரம் 9

பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்



முதலாம் பதிப்பு - 2017
இரண்டாம் பதிப்பு - 2018
மூன்றாம் பதிப்பு - 2019
நான்காம் பதிப்பு - 2020

ISBN 978-955-25-0154-8

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
இல. 35/3, கேரகல வீதி, கந்துபொட, தெல்கொடையில்
அமைந்துள்ள சென்வின் தனியார் நிறுவனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by : Educational Publications Department
Printed by : Sanvin (Pvt) Ltd.
No. 35/3, Keragala Road, Kanduboda, Delgoda.

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல் செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

முன்னுரை

அபிவிருத்தியின் உச்சத்தை நோக்கிச் செல்லும் இன்றைய உலகிற்கு மிக நவீன கல்வி முறையே அவசியமானதாகும். இதனால் மனிதப்பண்பும் திறன்களும் மிக்க மாணவர் பரம்பரையொன்றை உருவாக்கிக்கொள்ள முடியும். இம்மகத்தான பணிக்கு வலுவூட்டி உலக சவால்களுக்குத் தைரியமாக முகம்கொடுக்கக்கூடிய மாணவர் பரம்பரையொன்றை உருவாக்குவதற்கு உதவுவது எமது கடமையாகும். எமது நாட்டின் மாணவச் செல்வங்களின் அறிவை மேம்படுத்துவதற்காகவே கற்றல் சாதனங்களைத் தயாரித்து வழங்கும் நடவடிக்கையில் எமது திணைக்களம் ஈடுபட்டுள்ளது.

பாடநூலானது ஓர் அறிவு பெட்டகமாவதுடன் எம்மை இரசனை மிக்கதோர் உலகிற்கு அழைத்தும் செல்கின்றது. அத்துடன் இப்பாடநூல்களானது உங்களது பகுத்தறிவை அதிகரிக்கும் ஓர் ஒளியாக இருந்து பல திறன்களை அடைய உதவுகின்றது. இப்பாடநூல்களானது பாடசாலைக் காலம் முடிவடைந்த பின்னரும் அளவில்லா நினைவுகளைத் தந்து எப்போதும் உங்களுடன் கைகோர்த்து காணப்படும் பொக்கிசங்களாகும். இப்பாடநூல்களின் மூலம் நீங்கள் மேலும் பல அறிவுப் பரிமாணங்களை அடைய அர்ப்பணிப்புடன் செயற்பட வேண்டும்.

இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களின் கரங்களுக்கு வழங்கப்படுகிறது. அரசாங்கம் பாடநூல்களுக்காகச் செலவிடுகின்ற பெருந்தொகைப் பணத்திற்குரிய பெறுமதியை மாணவர்களாகிய உங்களால் மட்டுமே வழங்க முடியும். இப்பாடநூல்களைப் பயன்படுத்தி அறிவும் பண்பும் மிகுந்த நற்பிரஜைகளாக இந்த உலகத்தை ஒளிமயமாக்குவதற்கு நாட்டின் அனைத்து மாணவர்களுக்கும் தேவையான பலமும் வலிமையும் கிடைக்க வேண்டுமென உளமாற வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலாக்கத்திற்கு எண்ணற்ற வளப் பங்களிப்பை வழங்கிய எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழு அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள உத்தியோகத்தர்களுக்கும் எனது உளம் நிறைந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020.06.26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும	-	கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி	-	ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி) கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம்	-	பிரதி ஆணையாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

என். வாகீசமூர்த்தி	-	ஓய்வு பெற்ற கல்விப் பணிப்பாளர்
ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன்	-	ஓய்வு பெற்ற உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர்
எம். எஸ். எம். ரபீது	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரிய ஆலோசகர்
யூ. விவேகானந்தன்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
கலாநிதி ஜே. கே. ரத்னாயக்கா	-	சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர் கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.
எச்.எம்.ஜயசேன.	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட.
வி.வி.ஆர்.விதாரம	-	ஆசிரிய ஆலோசர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.
டபிள்யூ. எம். டபிள்யூ.சீ. வலிசிங்க	-	உதவிப் பணிப்பாளர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.
அஜித் ரணசிங்க	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, கேகாலை.
வீ.எம்.பி.லால் விஜயகாந்த	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.
அனுர வீரசிங்க	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரொமைன் ஜயவர்த்தன	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி டீ.கே.மல்லவ ஆராச்சி	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி நளின் கனேகொட	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, ஜயவர்தனபுரப் பல்கலைகழகம்.*
எஸ். இராஜேந்திரம்	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
ஸ்ரீமா தசநாயக்க	- *உதவிப் பணிப்பாளர் கணிதக் கிளை, கல்வி அமைச்சு.*
பீ.ஜெகத்குமார	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
அ.குலரத்தினம்	- *பிரதி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*
தனுஜா மைத்திரி விதாரண	- *உதவி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

மொழி பதிப்பாசிரியர்

எம். எம். நிலாப்தீன்	- *ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்வி அலுவலகம் பொலன்னறுவை.*

சரவை பார்ப்பு

பீ. ராஜசேகரன்	- *ஆசிரிய ஆலோசகர் (ஓய்வு நிலை)*

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன்	- *கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

அட்டைப்படமும் வடிவமைப்பும்

சத்திவேல் சத்தியசீலன்	- *கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

பொருளடக்கம்

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 11 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாத்தின் தொடக்கத் திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 11 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசி கூறுகின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

1 எண் கோலங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- இரு அடுத்துவரும் உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் சமமாக உள்ள ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பைக் காண்பதற்கும்
- ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு தரப்படும்போது எண் கோலத்தை எழுதுவதற்கும்
- எண் கோலங்களுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

எண் கோலங்களின் அறிமுகம்

கீழே சில எண் கோலங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

i. 3, 3, 3, 3, 3, ...
ii. 2, 4, 6, 8, 10, ...
iii. 5, 8, 11, 14, 17, ...
iv. 2, 4, 8, 16, 32, ...
v. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...
vi. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

முதலாம் எண் கோலம் மிகவும் எளிதானது. அக்கோலத்தில் இருக்கும் எல்லா எண்களும் 3 ஆகும்.

இரண்டாம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணுடன் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

மூன்றாம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 5 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணுடன் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

நான்காம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணை 2 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

ஐந்தாம் எண் கோலத்திற்கும் ஆறாம் எண் கோலத்திற்கும் அவற்றுக்கே உரிய இயல்புகள் உள்ளன.

எண் கோலங்களில் உள்ள எண்கள் அந்த எண் கோலத்தின் உறுப்புகள் எனப்படும். உதாரணமாக மேற்குறித்த முதலாவது எண் கோலத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 3 ஆகும்.

இரண்டாம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்பு 2 உம் இரண்டாம் உறுப்பு 4 உம் மூன்றாம் உறுப்பு 6 உம் ஆகும். இந்த எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

மூன்றாம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்பு 5 உம் இரண்டாம் உறுப்பு 8 உம் மூன்றாம் உறுப்பு 11 உம் ஆகும். இந்த எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

நான்காம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்பை 2 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறாக ஐந்தாம் எண் கோலத்தினதும் ஆறாம் எண் கோலத்தினதும் உறுப்புகள் பெறப்படும் விதங்களையும் விவரிக்கத்தக்கதாக இருக்கின்ற போதிலும் அவை ஓரளவுக்குக் கடினமாக இருக்கலாம்.

மேற்குறித்த எண் கோலங்களில் உறுப்புகள் காற்புள்ளிகளினால் வேறாக்கப் பட்டிருப்பதையும் இறுதியில் மூன்று குற்றுகள் இடப்பட்டிருப்பதையும் அவதானிக்க. இது பொதுவாக எண் கோலங்கள் எழுதப்படும் விதமாகும். மூன்று குற்றுகளும் கோலம் தொடர்ந்து செல்வதைக் காட்டுகின்றன.

கணிதத்தில் கோலம் என்னும் பதத்திற்குப் பதிலாகத் **தொடரி** என்னும் பதம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப மேலே ஆறு எண் தொடரிகள் (அதாவது சுருக்கமாகக் கூறினால் தொடரிகள்) உள்ளன. தொடரியின் உறுப்புகளின் ஒழுங்குமுறை முக்கியமானதாகும். ஓர் உதாரணமாக

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

என்னும் தொடரியிலும்

$$1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 6, \ldots$$

என்னும் தொடரியிலும் ஒரே எண்கள் இருந்தாலும் அத்தொடரிகள் ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட தொடரிகளாகும்.

மேற்குறித்த தொடரிகளில் சில முதல் உறுப்புகள் மாத்திரம் அவற்றின் கோலத்தை விவரிக்கின்றன. எனினும் ஒரு தொடரியின் முதல் சில உறுப்புகளை மாத்திரம் கொண்டு அத்தொடரியின் கோலத்தை ஊகித்தல் உகந்ததன்று. ஓர் உதாரணமாக

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

என்னும் எண் கோலத்தின், அதாவது தொடரியின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளையும் மாத்திரம் எழுதி (அதாவது 1, 2, 3, 4, 5, ... ஐ எழுதி) அதன் அடுத்த உறுப்பு யாதென வினவினால் அது 6 என்னும் பிழையான விடை கிடைக்கலாம். ஆகவே ஒரு தொடரியின் முதல் சில உறுப்புகளைத் தந்து அதன் அடுத்த உறுப்பை (அல்லது சில உறுப்புகளை) க் கேட்டல் கணிதரீதியில் சரியானதன்று.

மேலே தரப்பட்டுள்ள ஆறு தொடரிகளில் இரண்டாம் தொடரியினதும் மூன்றாம் தொடரியினதும் சிறப்பியல்பை (அல்லது இயல்பை) விவரிக்கலாம்.

இரண்டாம் தொடரியில் முதல் உறுப்புக்குப் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் மாறாப் பெறுமானம் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதனைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் காட்டலாம்.

2 4 6 8 10

+2 +2 +2 +2

மூன்றாம் தொடரியில் முதல் உறுப்புக்குப் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் மாறாப் பெறுமானம் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதனைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் காட்டலாம்.

5 8 11 14 17

+3 +3 +3 +3

இவ்விரு தொடரிகளினதும் உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் மாறாப் பெறுமானமாக இருப்பது சிறப்பியல்பாகும்.

யாதாயினும் ஓர் உறுப்பிலிருந்து (முதல் உறுப்பைத் தவிர) அதற்கு முந்திய உறுப்பைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் ''மாறிலி'' ஆகும். அதாவது மாறிலி என்பது மாறாப் பெறுமானம் ஆகும்.

தொடரி 2, 4, 6, 8, 10, ... இல் இம்மாறிலியின் பெறுமானம் 2 ஆகும்.

($4-2=6-4=8-6=10-8=2$ ஆகையால்).

5, 8, 11, 14, 17, ... இல் இம்மாறிலியின் பெறுமானம் 3 ஆகும்.

($8-5=11-8=14-11=17-14=3$ ஆகையால்).

இத்தகைய இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாப் பெறுமானமாக உள்ள தொடரிகள் பற்றி மேலும் கூறுவோம்.

இம்மாறாப் பெறுமானம் **பொது வித்தியாசம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப,

பொது வித்தியாசம் = முதல் உறுப்பல்லாத யாதாயினுமோர் உறுப்பு – அதற்கு முன்னைய உறுப்பு

மேலே தொடக்கத்தில் உள்ள தொடரி 3, 3, 3, 3, 3, ... ஆகும். இதற்கும் இவ்வியல்பு இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.

3 3 3 3 3

+0 +0 +0 +0

இங்கு கூட்டப்படும் மாறாப் பெறுமானம் (அதாவது பொது வித்தியாசம்) 0 எனக் கருதலாம்.

அவ்வியல்பு உள்ள வேறொரு தொடரி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

17 12 7 2 − 3...

−5 −5 −5 −5

அதன் முதல் உறுப்பு 17 ஆகும். அதன் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்பிலிருந்து 5 ஐக் கழிப்பதன் மூலம், அதாவது முந்திய உறுப்புடன் (−5) ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதற்கேற்ப இத்தொடரியின் பொது வித்தியாசம் (−5) ஆகும். அதாவது

பொது வித்தியாசம் $= 12 - 17 = 7 - 12 = 2 - 7 = -3 - 2 = -5$.

இத்தகைய ஒரு பொது வித்தியாசம் உள்ள ஒரு தொடரியின் பொது வித்தியாசத்தின் பெறுமானமும் முதல் உறுப்பும் அறியப்பட்டிருப்பின், அதன் சில உறுப்புகளை எளிதாக எழுதலாம். அதற்குச் சில உதாரணங்களைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

உதாரணம் 1

முதல் உறுப்பு 4 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் 3 ஆகவும் உள்ள தொடரியின் முதல் 3 உறுப்புகள் முறையே 4, 7, 10 ஆகும்.

உதாரணம் 2

முதல் உறுப்பு 7 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் −4 ஆகவும் உள்ள தொடரியின் முதல் 5 உறுப்புகள் முறையே 7, 3, −1, −5, −9 ஆகும்.

இவ்வாறு பொது வித்தியாசமும் முதல் உறுப்பும் தெரிந்த தொடரியின் சில உறுப்புகளை எளிதாக எழுதலாம். ஆனால் அதன் 50 ஆம் உறுப்பை அல்லது 834 ஆம் உறுப்பைக் காணல் எளிதானதன்று. அதற்குக் காரணம் 50, 834 போன்ற எண்கள் பெரிதாக இருப்பதாகும். ஆகவே இவ்வாறான பெரிய உறுப்பைக் காண்பதற்கு ஒரு முறையைக் காணவேண்டும். அதற்காகப் பொது உறுப்பைக் காண வேண்டும். அதை எவ்வாறு காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு

முதலில் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் காட்டுவதற்கு ஒரு குறிப்பீட்டைப் பயன் படுத்துவோம். அதற்காக ஒரு தரப்பட்டுள்ள தொடரியின்

முதல் உறுப்பை T_1 இனாலும்
இரண்டாம் உறுப்பை T_2 இனாலும்
மூன்றாம் உறுப்பை T_3 இனாலும் காட்டுவோம்.

உதாரணமாகத் தொடரி

$$5, 11, 17, 23, \ldots$$ இல்

முதலாம் உறுப்பு $= T_1 = 5$

இரண்டாம் உறுப்பு $= T_2 = 11$

மூன்றாம் உறுப்பு $= T_3 = 17$

நான்காம் உறுப்பு $= T_4 = 23$

என எழுதலாம்.

கணிதத்தில் நாம் பெரும்பாலும் ஒரு குறித்த தொடரியின் n ஆம் உறுப்பைக் கருதுவோம். இங்கு n இன் மூலம் யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் பெறுமானம் காட்டப்படுகின்றது. அதற்குக் காரணம் n எடுக்கத்தக்க பெறுமானங்கள் $1, 2, 3, \ldots$ ஆகிய நேர் நிறைவெண்களாக இருப்பதாகும். இங்கு $\frac{1}{2}$ ஆம் உறுப்பு, -4 ஆம் உறுப்பு, 3.5 ஆம் உறுப்பு ஆகியவற்றுக்குக் கருத்தில்லை. இவ்வாறு ஓர் n பெறுமானத்தைக் கருதும்போது அதனை ஒத்த n ஆம் உறுப்பு T_n இனால் காட்டப்படும். இந்த T_n ஆனது **பொது உறுப்பு** எனப்படும்.

1.1 பொது உறுப்பு தரப்படும்போது அதிலிருந்து தொடரியைக் காணல்

இதற்கு முன்னர் ஒரு தொடரியின் உறுப்புகளின் குறிப்பீடுகளையும் பொது உறுப்பின் குறியீட்டையும் பார்த்தோம். இப்போது சில உதாரணங்களினூடாகத் தொடரியின் பொது உறுப்பு தரப்படும்போது அத்தொடரியைக் காண்பதற்கும் கேட்கப்படும் உறுப்புகளைக் காண்பதற்கும் கற்போம். இதனைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

பொது உறுப்பு $2n + 3$ ஆகவுள்ள எண் தொடரியின்
(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) இருபதாம் உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 123 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
(iv) $(n + 1)$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் தருக.

(i) பொது உறுப்பு $2n + 3$ ஆகையால்

$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது, முதலாம் உறுப்பு $(2 \times 1) + 3 = 2 + 3 = 5$
$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது, இரண்டாம் உறுப்பு $(2 \times 2) + 3 = 4 + 3 = 7$
$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது, மூன்றாம் உறுப்பு $(2 \times 3) + 3 = 6 + 3 = 9$
$\therefore$ கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 5, 7, 9 ஆகும்.

(ii) $n = 20$ ஐ $2n + 3$ இல் பிரதியிடும்போது 20 ஆம் உறுப்புக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ இருபதாம் உறுப்பு $= (2 \times 20) + 3 = 40 + 3$

$= 43$

(iii) 123 ஆனது n ஆம் உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $2n + 3 = 123$

$$2n + 3 - 3 = 123 - 3$$

$$2n = 120$$

$$n = \frac{120}{2}$$

$$= 60$$

$\therefore$ 123 ஆனது இக்கோலத்தின் 60 ஆம் உறுப்பாகும்.

(iv) $n + 1$ ஆம் உறுப்பைப் பெறுவதற்கு n இற்குப் பதிலாக $(n + 1)$ ஐப் பிரதியிடுவோம்.

$$T = 2n + 3$$

$$T_{n+1} = 2(n + 1) + 3$$

$$= 2n + 2 + 3$$

$$= 2n + 5$$

$\therefore$ $(n + 1)$ ஆம் உறுப்பு $2n + 5$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$56 - 4n$ ஆனது பொது உறுப்பாக உள்ள எண் தொடரியில்

(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) 12 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 0 இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பெனக் காட்டுக.
(iv) 18 இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பன்று எனக் காட்டுக.

(i) பொது உறுப்பு $56 - 4n$ ஆகையால்

$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது, முதலாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 1) = 56 - 4 = 52$

$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது, இரண்டாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 2) = 56 - 8 = 48$

$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது, மூன்றாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 3) = 56 - 12 = 44$

$\therefore$ கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 52, 48, 44 ஆகும்.

(ii) இத்தொடரியின் 12 ஆம் உறுப்பு $= 56 - 4 \times 12$
$= 56 - 48$
$= 8$

(iii) இந்த எண் தொடரியில் 0 ஓர் உறுப்பெனின்,

$56 - 4n = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$56 - 4n + 4n = 4n$ (இரு பக்கங்களுடனும் $4n$ ஐக் கூட்டல்)

$$\frac{56}{4} = \frac{4n}{4}$$

$$14 = n$$

$$n = 14$$

$\therefore$ 0 ஆனது இத்தொடரியின் 14 ஆம் உறுப்பாகும்.

(iv) இத்தொடரியில் 18 ஓர் உறுப்பெனின்,

$56 - 4n = 18$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

அப்போது $56 - 4n + 4n = 18 + 4n$

$$56 - 18 = 18 - 18 + 4n$$

$$38 = 4n$$

$$n = 9\frac{1}{2}$$

18 ஆனது தொடரியின் ஓர் உறுப்பெனின், n இன் பெறுமானம் ஒரு நிறைவெண்ணாக இருத்தல் வேண்டும். $n = 9\frac{1}{2}$ ஆகையால் 18 ஆனது இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பன்று.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு	$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது முதல் உறுப்பு	$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது இரண்டாம் உறுப்பு	$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது மூன்றாம் உறுப்பு	எண் கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள்
$3n + 2$	$(3 \times 1) + 2 = 5$	$(3 \times 2) + 2 = 8$	$(3 \times 3) + 2 = 11$	..., ..., ...
$5n - 1$	$(5 \times 1) - 1 = 4$	....	....	..., ..., ...
$2n + 5$	....	....	....	..., ..., ...
$20 - 2n$	....	....	....	..., ..., ...
$50 - 4n$	....	....	....	..., ..., ...
$35 - n$	....	....	....	..., ..., ...

2. ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு $4n - 3$ ஆகும். அக்கோலத்தின்
- (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
- (ii) 12 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
- (iii) 97 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
- (iv) 75 இத்தொடரின் ஓர் உறுப்பன்று எனக் காட்டுக.

3. ஓர் எண் கோலத்தின் n ஆம் உறுப்பு $7n + 1$ ஆகும். அக்கோலத்தின்
- (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
- (ii) 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
- (iii) 36 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
- (iv) $n + 1$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் காட்டுக.

4. பொது உறுப்பு $50 - 7n$ ஆன எண் கோலத்தின்
- (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
- (ii) 10 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
- (iii) $n + 1$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் காட்டுக.
- (iv) 7 ஆம் உறுப்புக்குப் பின்னால் கிடைக்கும் உறுப்புகள் மறை எண்கள் எனக் காட்டுக.

1.2 ஒரு எண் தொடரியின் பொது உறுப்பைக் (T_n) காணல்

T_n இற்கு n சார்பில் ஒரு கோவையைப் பெறுதல் எமது நோக்கமாகும். அப்போது ஒரு தொடரியின் எந்தவோர் உறுப்பையும் அக்கோவையைப் பயன்படுத்தி எளிதாகக் காணலாம். இவ்வாறு ஒரு கோவையைப் பெறத்தக்க விதத்தை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

பொது வித்தியாசம் உள்ள ஒரு தொடரி 5, 11, 17, 23, ... இன் 80 ஆம் உறுப்பைக் காணவேண்டும் எனக் கொள்வோம். அதாவது, T_{80} ஐக் காண வேண்டும். அதற்காகப் பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள கோலத்தை அவதானிப்போம்.

n	T_n	பொது வித்தியாசம் 6, n ஆகியவற்றின் சார்பில் T_n ஐ எழுதத்தக்க விதம்
1	5	$6 \times 1 - 1$ அல்லது $5 + 0 \times 6$
2	11	$6 \times 2 - 1$ அல்லது $5 + 1 \times 6$
3	17	$6 \times 3 - 1$ அல்லது $5 + 2 \times 6$
4	23	$6 \times 4 - 1$ அல்லது $5 + 3 \times 6$
5	29	$6 \times 5 - 1$ அல்லது $5 + 4 \times 6$

மேற்குறித்த அட்டவணையில் நிரல் 3 இல் உள்ள $6 \times 1 - 1, 6 \times 2 - 1, 6 \times 3 - 1, \ldots$ கோவைகள் ஏன் அவ்வாறு எழுதப்பட்டுள்ளன என்பது உங்களுக்குப் பிரச்சினையாக இருக்கலாம். விசேடமாக 1 ஐக் கழிப்பதற்கான காரணம் விளக்கமற்று இருக்கலாம். அதனைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

தரப்பட்டுள்ள தொடரி 5, 11, 17, 23, ... இல் பொது வித்தியாசம் 6 ஆகையால் முதலில் தரப்பட்டுள்ள தொடரியையும் அதற்குக் கீழே 6 இன் சில மடங்குகளையும் எழுதுவோம்.

5, 11, 17, 23, 29, ...

6, 12, 18, 24, 30, ...

6 இன் மடங்குகளிலிருந்து 1 வீதம் கழித்து தொடரி பெறப்படுவதை நீங்கள் அவதானிக்கலாம்.

தொடரியின் 1 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் முதலாம் மடங்கு −1
தொடரியின் 2 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் இரண்டாம் மடங்கு −1
தொடரியின் 3 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் மூன்றாம் மடங்கு −1

என்றவாறு எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப

தொடரியின் n ஆம் உறுப்பு = 6 இன் n ஆம் மடங்கு −1

$$\therefore \ T_n = 6n - 1$$

அட்டவணைக்கேற்ப T_{80} ஆனது $6 \times 80 - 1 = 479$ ஆகும். அதாவது

$T_{80} = 6 \times 80 - 1 = 479$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப 80 ஆம் உறுப்பு 479 ஆகும். மேலும் இத்தொடரியின் பொது உறுப்பு T_n இற்கான கோவையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$T_n = 6n - 1$$

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இத்தொடரியின் எந்தவோர் உறுப்பையும் காணலாம். உதாரணமாகத் தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் 24 ஆம் உறுப்பைக் காண்பதற்குச் சூத்திரத்தில் $n = 24$ எனப் பிரதியிட வேண்டும். அப்போது

$T_{24} = 6 \times 24 - 1 = 143$ ஆகும்.

$\therefore$ தொடரியின் 24 ஆம் உறுப்பு 143 ஆகும்.

இதனை மேலும் சில உதாரணங்களூடாகப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

முதல் நான்கு உறுப்புகள் 15, 19, 23, 27 ஆன பொது வித்தியாசம் உள்ள தொடரியின் n ஆம் உறுப்பு T_n இற்கு ஒரு கோவையைக் காண்போம்.

இங்கு பொது வித்தியாசம் $= 19 - 15 = 4$ ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் முதற் சில உறுப்புகளையும் அதற்குக் கீழே 4 இன் சில மடங்குகளையும் (நேர் நிறைவெண் மடங்குகள்) எழுதுவோம்.

15, 19, 23, 27, ...
4, 8, 12, 16, ...

ஒவ்வொரு நான்கின் மடங்குடனும் 11 வீதம் கூட்டும்போது தரப்பட்டுள்ள தொடரி கிடைக்கும் என்பது தெளிவாகும்.

அதற்கேற்ப பொது உறுப்பு T_n இற்கான சூத்திரம்

$T_n = 4n + 11$

எனக் கிடைக்கும். இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, இத்தொடரியின் 100 ஆம் உறுப்பைக் காண்போம்.

$T_{100} = 4 \times 100 + 11 = 411$

இப்போது பொது வித்தியாசம் ஒரு மறைப் பெறுமானமாகக் குறையும் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொடரியைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 2

10, 7, 4, ... இன் பொது வித்தியாசம் $= 7 - 10 = -3$ ஆகும்.

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் உறுப்புகளையும் -3 இன் மடங்குகளையும் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக எழுதுவோம்.

10, 7, 4, ...
$-3, -6, -9, \ldots$

ஒவ்வொரு -3 இன் மடங்குடனும் 13 வீதம் கூட்டும்போது தொடரியின் உறுப்புகள் கிடைப்பதை அவதானிக்கலாம்.

ஆகவே $T_n = -3n + 13$ எனப் பொது உறுப்பை எழுதலாம்.

அவ்வாறு இல்லாவிட்டால், முதலில் ஒரு நேர் உறுப்பு கிடைக்குமாறு $T_n = 13 - 3n$ எனவும் பொது உறுப்பை எழுதலாம்.

ஓர் உதாரணமாக இத்தொடரியின் 30 ஆம் உறுப்பைக் காண $T_n = 13 - 3n$ இல் $n = 30$ எனப் பிரதியிட வேண்டும். அப்போது
$T_{30} = -3 \times 30 + 13 = -77$ எனக் கிடைக்கும்.
எனவே 30 ஆம் உறுப்பு -77 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

கோலம்	இரு அடுத்துவரும் உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம்	கோலத்தை உருவாக்குவதுடன் தொடர்புபட்ட மடங்கு
(i) 5, 8, 11, 14,...	$8 - 5 = 3$	3
(ii) 10, 17, 24, 31, ...		
(iii) $2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2}, 7, \ldots$		
(iv) 20, 17, 14, 11, ...		
(v) 50, 45, 40, 35, ...		
(vi) 0.5, 0.8, 1.1, 1.4, ...		

2. 10, 17, 24, 31, ... என்னும் எண் கோலத்தைக் கொண்டு அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

உறுப்பு ஒழுங்குமுறை	உறுப்பு	பொது உறுப்பைப் பெறல்
1 ஆம் உறுப்பு	10	7 × 1 + ...
2 ஆம் உறுப்பு	17	7 × 2 + ...
3 ஆம் உறுப்பு	24	... + ...
4 ஆம் உறுப்பு	31	... + ...
n ஆம் உறுப்பு	....	... + ... = ...

3. பின்வரும் தொடரிகளின் பொது உறுப்பைக் காண்க.

a. 1, 4, 7, 10, ...
b. 1, 7, 13, 19, ...
c. 9, 17, 25, 33, ...
d. 4, 10, 16, 22, ...
e. 22, 19, 16, 13, ...
f. 22, 20, 18, 16, ...

1.3 எண் கோலங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் எண் கோலங்களைப் பயன்படுத்திப் பல்வேறு கணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம்.

உதாரணம் 1

தூரம் ஓடுதலில் பயிற்சி பெறும் ஒரு விளையாட்டு வீரர் தினமும் பயிற்சியில் ஈடுபடுகின்றார். அவர் முதல் நாள் 500 m தூரம் ஓடும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒவ்வொரு நாளும் முந்திய நாளிலும் பார்க்க 100 m வீதம் கூடுதலாக ஓடுகின்றார்.

(i) அவர் முதல் மூன்று நாட்களிலும் ஓடும் தூரங்களை வேறுவேறாக எழுதுக.
(ii) நாட்களின் எண்ணிக்கைக்கேற்ப ஓடும் தூரங்களுக்குப் பொது உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 20 ஆம் நாளில் அவர் ஓடும் தூரத்தைக் காண்க.
(iv) அவர் எத்தனையாம் நாளில் 3 km தூரம் ஓடுகின்றார்?

(i) முதல் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m
இரண்டாம் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m + 100 m = 600 m
மூன்றாம் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m + 100 m + 100 m = 700 m
எண் கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 500, 600, 700

(ii) நாட்களின் எண்ணிக்கை n எனக் கொள்வோம்.
ஓடும் தூரங்களைக் காட்டும் எண் கோலத்திற்கேற்ப அது 100 இன் மடங்குகளில் உருவாகுகின்றது.
$\therefore$ பொது உறுப்பு $T_n = 100n + 400$

(iii) 20 ஆம் நாளில் ஓடும் தூரம் 20 ஆம் உறுப்பினால் காட்டப்படும் என்பது தெளிவாகும்.

∴ எண் கோலத்தின் 20 ஆம் உறுப்பு T_{20} $= (100 \times 20) + 400$

$= 2000 + 400$

$= 2400$ m

$= 2.4$ km

∴ 20 ஆம் நாளில் ஓடும் தூரம் 2.4 km ஆகும்.

(iv) 3 km = 3000 m.

n ஆம் நாளில் 3000 m ஓடுகிறார் எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $100n + 400 = 3000$

$$100n + 400 - 400 = 3000 - 400$$

$$100\,n = 2600$$

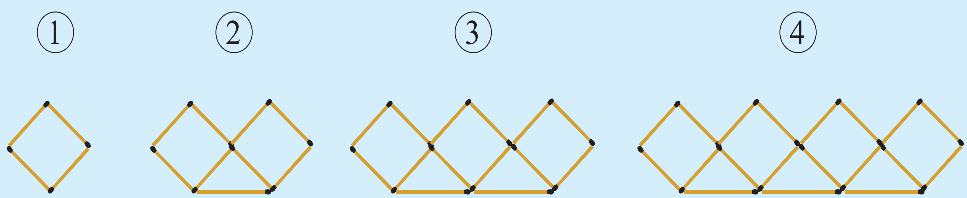
$$\therefore\ n = \frac{2600}{100}$$

$$= 26$$

∴ அதாவது 3 km தூரத்தை அவர் தனது பயிற்சியின் 26 ஆம் நாள் ஓடுவார்.

பயிற்சி 1.3

1. தீக்குச்சிகளினால் அமைக்கப்படும் ஒரு கோலம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



அதனைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

கோலத்தின் எண்	1	2	3	4
தீக்குச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை	....	9	....	....

(i) இக்கோலத்தின் 20 ஆம் உருவை உருவாக்கத் தேவையான தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) இக்கோலத்தின் எத்தனையாம் உருவை முழுமையாக உருவாக்குவதற்கு 219 தீக்குச்சிகள் தேவை ?

(iii) உயர்ந்தபட்சம் 75 தீக்குச்சிகளைப் பயன்படுத்தி இக்கோலத்தில் ஓர் உருவை உருவாக்கும்போது 1 தீக்குச்சி எஞ்சியிருக்குமெனக் காட்டுக.

2. தொழினுட்பர் ஒருவர் இரும்புக் கோல் துண்டுகளை உருகிணைத்துச் செய்யும் ஒரு படலைக்காக 5 m நீளமுள்ள இரும்புத் துண்டு ஒன்றிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் வேறுபட்ட நீளமுள்ள துண்டுகளை வெட்டுகிறார். மிகச் சிறிய துண்டு 15 cm ஆக இருக்கும் அதே வேளை, மற்றைய துண்டுகள் ஒவ்வொன்றும் இரு அடுத்திருக்கும் துண்டுகளிடையே உள்ள வித்தியாசம் 10 cm ஆக இருக்குமாறு வெட்டப்படுகின்றன.

(i) வெட்டப்படும் நீளத்தில் சிறிய மூன்று துண்டுகளின் நீளங்களை முறையே எழுதுக.

(ii) மிகச்சிறிய துண்டிலிருந்து நீளத்திற்கேற்ப ஏறுவரிசையில் எடுக்கும்போது 20 ஆம் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(iii) நீளத்திற்கேற்ப ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது 50 ஆம் துண்டை வெட்டுவதற்கு 5 m நீளமுள்ள இரும்பு கோல் போதியதன்றெனக் காட்டுக.

3. பாடசாலையில் நடைபெற்ற ஆண்டுச் சேமிப்புத் தினத்தில் கீதாவும் அன்வரும் முதலில் ரூ. 100 வீதம் தமது உண்டியலில் இட்டு பணத்தைச் சேமிக்கத் தொடங்கினர். அதன் பின்னர் அவர்கள் ஒரு வாரத்திற்கு ஒரு தடவை உண்டியலில் பணத்தை இடுகின்றனர். கீதா ரூ. 10 வீதமும் அன்வர் ரூ. 5 வீதமும் தவறாமல் குறித்த நாளில் உண்டியலில் இடுகின்றனர்.

(i) 5 வாரங்களின் இறுதியில் கீதாவின் உண்டியலில் உள்ள பணம் யாது?

(ii) 10 வாரங்களின் இறுதியில் அன்வரின் உண்டியலில் உள்ள பணம் யாது?

(iii) 50 வாரங்களுக்குப் பின்னர் அவர்கள் தமது உண்டியல்களைத் திறந்து, அவற்றில் உள்ள பணத்தினைச் சோதித்தனர். கீதா சேமித்த பணம் அன்வர் சேமித்த பணத்திலும் பார்க்க எவ்வளவினால் கூடியது?

4. ஒரு நடன நிகழ்ச்சிக்காகத் திறந்தவெளி அரங்கில் ஆசனங்கள் ஒரு கோலத்தில் காணப்படுமாறு ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டிருந்தன. அதில் முதல் நிரையில் 9 ஆசனங்களும் இரண்டாம் நிரையில் 12 ஆசனங்களும் மூன்றாம் நிரையில் 15 ஆசனங்களும் இருக்குமாறு 15 நிரைகள் அமைக்கப்பட்டிருந்தன.

(i) முதல் 5 நிரைகளிலும் உள்ள ஆசனங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) 15 ஆவது வரிசையில் எத்தனை ஆசனங்கள் உள்ளன

(iii) 1 ஆவது நிரையில் உள்ள ஆசனங்களின் எண்ணிக்கையைப் போன்று 4 மடங்கு ஆசனங்கள் 10 ஆம் நிரையில் காணப்படுகின்றன எனக் காட்டுக.

(iv) எத்தனையாவது நிரையில் 51 ஆசனங்கள் காணப்படும்?

பலவினப் பயிற்சி

1. சில எண் கோலங்களின் பொது உறுப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(a) $3n - 5$ (b) $6n + 5$ (c) $6n - 5$

அந்த எண் கோலங்கள் ஒவ்வொன்றினதும்
- (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
- (ii) 20 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
- (iii) $n - 1$ ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

2. பின்வரும் எண் கோலங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பொது உறுப்பைக் காண்க.

(i) $-3, 1, 5, 9, \ldots$ (ii) $0, 4, 8, 12, \ldots$

(iii) $1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ (iv) $-6, -3, 0, 3, \ldots$

3. எண் கோலம் 42, 36, 30, 24, ... இன் பொது உறுப்பு $6(8 - n)$ எனக் காட்டுக.

4. மோகன் ஒரு தனியார் நிறுவனத்தில் தொழில் செய்கிறார். அவருடைய தொடக்க மாதச் சம்பளம் ரூ. 25000 ஆகும். இரண்டாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்திலிருந்து ஆண்டுதோறும் அவருக்கு ரூ. 2400 சம்பள ஏற்றம் உரித்தாகும்.
- (i) இரண்டாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அவருடைய மாதச் சம்பளம் எவ்வளவு?
- (ii) முதல் மூன்று ஆண்டுகளிலும் மோகனின் மாதச் சம்பளங்களின் பெறுமானங்களை வேறுவேறாக எழுதுக.
- (iii) n ஆம் ஆண்டின் சம்பளத்தைக் காட்டும் கோவையை n இன் சார்பில் தருக.
- (iv) 5 ஆண்டுகளின் இறுதியில் அவருடைய மாதச் சம்பளத்தை மேலே (iii) இல் பெற்ற பொது உறுப்பைக் கொண்டு காண்க.

பொழிப்பு

- எண் கோலத்தில் உறுப்புகளுக்கிடையே காணப்படும் தொடர்பைக் காண்பதன் மூலம் அக்கோலத்தின் ஏனைய உறுப்புகளைப் பெற முடியும்.
- ஓர் எண் தொடரியின் n ஆம் உறுப்பான T_n ஆனது அதன் பொது உறுப்பு எனப்படும்.
- எண் தொடரியின் பொது உறுப்பிலிருந்து அத்தொடரியைக் காணமுடியும்.

2 துவித எண்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- துவித எண்களை இனங்காண்பதற்கும்
- தசம எண் ஒன்றைத் துவித எண்ணாக மாற்றுவதற்கும்
- துவித எண் ஒன்றைத் தசம எண்ணாக மாற்றுவதற்கும்
- துவித எண்களைக் கூட்டுவதற்கும் கழிப்பதற்கும்
- துவித எண்களைப் பயன்படுத்தும் சந்தர்ப்பங்களை இனங்காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

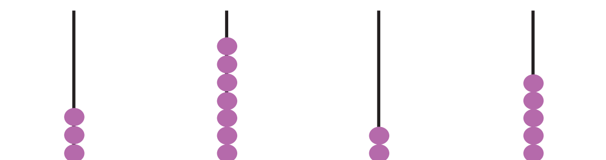
அறிமுகம்

நாம் பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் இந்து அராபிய எண் குறியீட்டு முறையில் எண்களை எழுதும் முறையைப் பற்றி முன்னர் கற்றவற்றைப் பின்வருமாறு நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணமாக 3725 என்ற எண்ணைக் கருதுக. 3725 இல்

5 ஆல் 1 களின் (10^0 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
2 ஆல் 10 களின் (10^1 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
7 ஆல் 100 களின் (10^2 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
3 ஆல் 1000 களின் (10^3 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.

இந்த எண்ணைப் பின்வருமாறு எண் சட்டம் ஒன்றைப் பயன்படுத்தியும் காட்டலாம்.



1000	100	10	1
10^3	10^2	10^1	10^0

3725 என்ற எண்ணைப் பின்வருமாறும் எழுத முடியும் எனவும் கற்றுள்ளீர்கள்.

3 725 = 3, 1 000 கள் + 7, 1 00 கள் + 2, 1 0 கள் + 5, 1 கள்

$3\ 725 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

மற்றுமொரு உதாரணமாக 603 ஐப் பார்ப்போம். இதனை

$603 = 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ என எழுத முடியும்.

நாம் பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் இந்து அராபிய எண் முறையில் ஒவ்வொரு இடப்பெறுமானமும் 1, 10, 100, 1000, ... என்றவாறு 10 இன் வலுக்களாக அமைகின்றன. அத்தோடு இம்முறையில் எண்களை எழுதுவதற்கு 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற பத்து எண் குறியீடுகள் (இலக்கங்கள்) பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு மேலே குறிப்பிட்ட பத்து எண் குறியீடுகளையும் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு இடப்பெறுமானத்தையும் பத்தின் வலுக்களைக் கொண்டு எழுதும்போது அது அடி 10 இலான எண்கள் எனப்படும். இவ்வெண்கள் ''**தசம எண்கள்**'' என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு

- ''தசம எண்கள்'' என்பதைத் ''தசமப் புள்ளியுடனான'' எண் எனச் சிக்கலாக்க வேண்டாம்.
- $10^0 = 1$ என்பதைப் போல பூச்சியம் தவிர்ந்த எந்தவொரு எண்ணினதும் பூச்சியச் சுட்டி 1 ஆகும். ஆகவே $2^0 = 1$ ஆகும்.

2.1 தசம எண்களைத் துவித எண்களாக எழுதுதல்

எண்களை எழுதுவதற்கு அடி 10 ஐத் தவிர வேறு எண் அடிகளையும் பயன்படுத்த முடியும். உதாரணமாக 0, 1 ஆகிய இரண்டு இலக்கங்களையும் 2 இன் வலுக்களை இடப்பெறுமானங்களாகக் கொண்டு அடி இரண்டில் எண்களை எழுத முடியும். இது **துவித எண்கள்** என அழைக்கப்படும். இதற்காக முதலில் 2 இன் வலுக்களாக உள்ள இடப்பெறுமானங்களை இனங்காண்போம்.

$2^0 = 1$	$2^5 = 32$
$2^1 = 2$	$2^6 = 64$
$2^2 = 4$	$2^7 = 128$
$2^3 = 8$	$2^8 = 256$
$2^4 = 16$	$2^9 = 512$

இவ்வாறு 2 இன் வலுக்களாக இடப் பெறுமானங்களைக் கணித்து எழுதலாம்.

அடி இரண்டில் எண்களை எழுதும் முறையை விளங்குவதற்காக அடி பத்தில் எழுதப்பட்ட 13 என்ற எண்ணை உதாரணமாகக் கொள்வோம். 13 ஐ 2 இன் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதும் முறையைப் பார்ப்போம்.

குறிப்பு

அடி 10 இல் இலக்கங்களை எழுதுவதற்கு 0, 1, ..., 9 வரையுள்ள 10 இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தியது போன்று அடி 2 இல் இலக்கங்களை எழுதுவதற்கு 0, 1 ஆகிய இரண்டு இலக்கங்களையே பயன்படுத்துவோம்.

1, 2, 4, 8, 16 என்பன இரண்டின் தொடக்க வலுக்கள் சிலவற்றின் பெறுமானங்களாகும்.

இவ்வலுக்களின் கூட்டலாக 13 ஐ எழுதுவோம்.

$13 = 8 + 4 + 1$

இதனைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

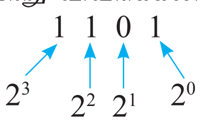
$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$

$13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

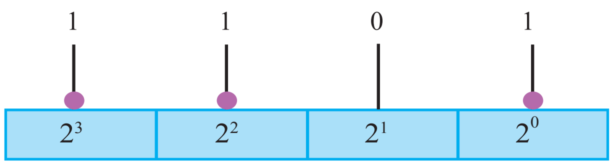
இங்கு இடப் பெறுமானங்கள் 2^3 இலிருந்து ஆரம்பித்து 2^2, 2^1, 2^0 என ஒழுங்காக எழுதப்பட்டுள்ளன. இங்கு 2^1 என்ற இடப் பெறுமானம் இன்மையால் அது 0×2^1 என எழுதப்பட்டுள்ளது.

13 ஐ எழுதுவதற்குப் பயன்படுத்திய இலக்கங்கள் 1101 ஆகும்.

இங்கு காணப்படும் 0, 1 ஆகிய இலக்கங்கள் வகைகுறிக்கும் இடப் பெறுமானங்களைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.



இதனைப் பின்வருமாறு எண் சட்டத்தின் மூலம் காட்டலாம்.



இங்கு 1101 என்பது அடி இரண்டில் எழுதப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காட்டுவதற்கு $1101_{\text{இரண்டு}}$ என எண்ணினது வலது பக்கத்தில் சற்றுக் கீழே சிறிதாக இரண்டு என எழுத்தில் எழுதப்படும். இவ்வாறே அடி பத்தில் எழுதப்பட்டுள்ள எண்களைத்

தனித்தனியாக இனங்காண்பதற்கு இலகுவாக 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் வலது பக்கத்திலும் சிறியதாகப் பத்து என இப்பாடத்தின் தேவையான இடங்களில் எழுதப்பட்டுள்ளது. உதாரணமாக $603_{\text{பத்து}}$ என்பது நாம் சாதாரணமாக அடி பத்தில் எழுதும் 603 ஆகும்.

மற்றுமொரு உதாரணத்தைப் பார்ப்போம். தசம எண்ணாக எழுதப்பட்டுள்ள $20_{\text{பத்து}}$ என்பதைத் துவித எண்ணாக எழுதுவோம்.

2 இன் வலுக்களை நினைவுகூர்வதன் மூலம்

$$\begin{aligned} 20 &= 16 + 4 \\ &= 2^4 + 2^2 \\ &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \end{aligned}$$

என்றவாறு எழுதலாம்.

எனவே, $20_{\text{பத்து}} = 10100_{\text{இரண்டு}}$ என எழுதலாம்.

இங்கு முக்கிய விடயம் யாதெனில், இரண்டினது வலுக்களின் கூட்டலாக ஒரேயொரு விதமாக மட்டுமே எழுத முடியும். உதாரணமாக 20 ஐ 16 + 4 என்ற விதத்தில் மட்டுமே இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுத முடியும். எந்தவொரு எண்ணையும் இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுத முடியும். பல எண்களை இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதுவதன் மூலம் இதனை நீங்கள் அறிய முடியும்.

அடி பத்தில் உள்ள எண்களை அடி இரண்டில் உள்ள எண்களாக மாற்றுவதற்கு மேலே கூறப்பட்ட முறை தவிர்ந்த வேறு முறைகளையும் பயன்படுத்தலாம். ஏனெனில், பெரிய எண்களை இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதும் விதத்தைச் சிந்திப்பது சிரமமாக இருக்கலாம். உதாரணமாக 3 905 என்பது இரண்டின் எந்தெந்த வலுக்களின் கூட்டலாக அமையும் என்பதைச் சிந்திப்பது சிரமமாகலாம். எனவே எல்லாச் சந்தர்ப்பத்திற்கும் பொருத்தமான வேறொரு முறையையும் இங்கு கருத்திற் கொள்வோம்.

$22_{\text{பத்து}}$ என்பதை அடி இரண்டில் எழுதுவதற்கு முதலில் 22 ஐ 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும். அப்போது மீதியாகும் எண்ணையும் குறித்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 22 \\ \hline & 11 \text{ மீதி } 0 \end{array}$$

இப்போது பெறப்பட்டுள்ள 11 ஐ மீண்டும் 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 22 \\ \hline 2 & 11 \text{ மீதி } 0 \\ \hline & \;\;5 \text{ மீதி } 1 \end{array}$$

இவ்வாறு ஈவுகளைத் தொடர்ந்து வகுத்து மீதியையும் குறிக்க வேண்டும். இறுதியில் ஈவு 0 ஆகவும் மீதி 1 ஆகவும் வரும் வரை தொடர்ந்து வகுக்க வேண்டும். முழு வகுத்தலும் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

2	22		
2	11	மீதி	0
2	5	மீதி	1
2	2	மீதி	1
2	1	மீதி	0
	0	மீதி	1

1 0 1 1 0 இரண்டு

இங்கு நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ள மீதிப் பெறுமானங்களைக் கீழிருந்து மேலாக ஒழுங்காக எடுத்து எழுதுவதன் மூலம் துவித எண் பெறப்படும். அதாவது

$$22_{\text{பத்து}} = 10110_{\text{இரண்டு}}$$

இவ்வாறு பெறப்பட்ட துவித எண் சரியானதா என்பதை 22 ஐ 2 இன் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதுவதன் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

$$22 = 16 + 4 + 2$$

$$= 2^4 + 2^2 + 2^1$$

$$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

இதன் மூலம் விடை சரியென வாய்ப்புப் பார்க்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு தசம எண்ணையும் துவித எண்ணாக எழுதுக.

(i) $32_{\text{பத்து}}$

2	32	
2	16	0
2	8	0
2	4	0
2	2	0
2	1	0
	0	1

$$32_{\text{பத்து}} = 100000_{\text{இரண்டு}}$$

(ii) $154_{\text{பத்து}}$

2	154	
2	77	0
2	38	1
2	19	0
2	9	1
2	4	1
2	2	0
2	1	0
	0	1

$$154_{\text{பத்து}} = 10011010_{\text{இரண்டு}}$$

பயிற்சி 2.1

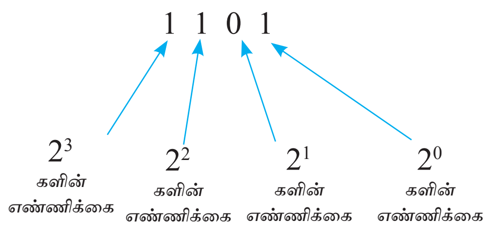
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தசம எண்களைத் துவித எண்களாகத் தருக.

(i) 4	(ii) 9	(iii) 16	(iv) 20	(v) 29
(vi) 35	(vii) 43	(viii) 52	(ix) 97	(x) 168

2.2 துவித எண்களைத் தசம எண்களாக எழுதுதல்

மேலே பகுதி 2.1 இல் தசம எண்களைத் துவித எண்களாக எழுதும் முறையைப் பார்த்தோம். இப்போது துவித எண்களைத் தசம எண்களாக மாற்றும் முறையைப் பார்ப்போம். பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் அதனை இலகுவாகச் செய்யும் முறையைப் பார்ப்போம்.

மேலே பகுதி 2.1 இல் 13 என்னும் தசம எண்ணை அடி இரண்டில் எழுதியபோது $1101_{\text{இரண்டு}}$ எனப் பெறப்பட்டது. இங்கு 1, 1, 0, 1 ஆகிய இலக்கங்களால் வகைகுறிக்கப்படும் பெறுமானங்கள் யாவை என நினைவுகூர்வோம்.



$1101_{\text{இரண்டு}}$ என்பதில் காணப்படும் இரண்டின் வலுக்களைக் கூட்டும்போது தசம எண் பெறப்படும். அப்போது,

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 4 + 1 = 13$$

ஆகவே விடையாகத் தசம எண் 13 பெறப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

$101100_{\text{இரண்டு}}$ என்பதைத் தசம எண்ணாக எழுதுக.

இங்கு முதலாவது இலக்கத்தின் இடப்பெறுமானம் 2^5 ஆகும் என்பதை அவதானிக்க. அடுத்துவரும் இடப்பெறுமானங்களுக்கான சுட்டிகள் தொடர்ந்து 5 இலிருந்து 1 இனால் குறைந்து செல்வதால், பெறப்படும் 2 இன் வலுக்களைக் கூட்டுவதால் தேவையான எண் பெறப்படும்.

$$101100_{\text{இரண்டு}} = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0$$
$$= 2^5 + 2^3 + 2^2 = 32 + 8 + 4$$
$$= 44_{\text{பத்து}}$$

$\therefore\ 101100_{\text{இரண்டு}} = 44_{\text{பத்து}}$

குறிப்பு

$44_{\text{பத்து}}$ ஐத் துவித எண்ணாக மாற்றுவதன் மூலம் இவ்விடையை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள துவித எண்களைத் தசம எண்களாகத் தருக.

(i) $101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $1101_{\text{இரண்டு}}$ (iii) $1011_{\text{இரண்டு}}$ (iv) $1100_{\text{இரண்டு}}$

(v) $11111_{\text{இரண்டு}}$ (vi) $100111_{\text{இரண்டு}}$ (vii) $1101101_{\text{இரண்டு}}$ (viii) $111000_{\text{இரண்டு}}$

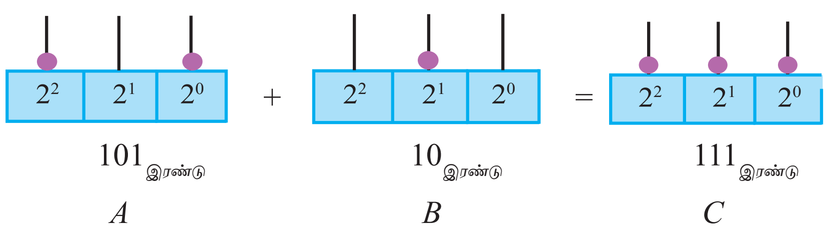
(ix) $111110_{\text{இரண்டு}}$ (x) $110001_{\text{இரண்டு}}$

2.3 துவித எண்களைக் கூட்டுதல்

துவித எண்களை எண் சட்டம் ஒன்றில் வகைகுறிக்கும்போது ஒரு கோலில் இருக்கக் கூடிய எண்களின் உயர் எண்ணிக்கை 1 ஆகும். கூட்டலின்போது ஒரு கோலில் இரண்டு எண்ணிகள் வரும் சந்தர்ப்பத்தில் அதற்குப் பதிலாக அதன் இடது பக்கத்தில் உள்ள கோலில் ஒரு எண்ணியை இடுதல் வேண்டும்.

இரு துவித எண்களைக் கூட்டுவதை எண் சட்டங்களின் மூலம் நோக்குவோம்.

$101_{\text{இரண்டு}} + 10_{\text{இரண்டு}}$ என்பதைக் கூட்டுவோம்.

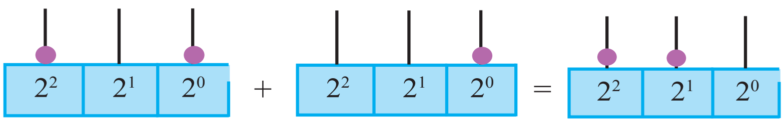


A இலும் B இலும் உள்ள எண்ணிகளை ஒத்த கோல்களில் ஒன்றாகச் சேர்க்கும்போது அது எண் சட்டம் C இனால் காட்டப்படுகின்றது.

இடப்பெறுமானம் 2^0 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.
இடப்பெறுமானம் 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.
இடப்பெறுமானம் 2^2 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.

எனவே $101_{\text{இரண்டு}} + 10_{\text{இரண்டு}} = 111_{\text{இரண்டு}}$.

► இப்போது $101_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் பெறுமானத்தை எண் சட்டத்தின் மூலம் பெறுவோம்.



$101_{\text{இரண்டு}}$ $\quad$ $1_{\text{இரண்டு}}$ $\quad$ $110_{\text{இரண்டு}}$

A $\quad$ B $\quad$ C

A இன் 2^0 கோலில் உள்ள எண்ணியை B இன் 2^0 கோலில் இடும்போது அக்கோலில் இரு எண்ணிகள் வரப்போகின்றன. ஆனால் ஒரே கோலில் இரு எண்ணிகள் இருக்க முடியாது. ஆகவே 2^0 ஐக் குறிக்கும் கோலில் வரவேண்டிய இரு எண்ணிகளுக்குப் பதிலாக 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோலில் 1 எண்ணியை இடுதல் வேண்டும். இது எண் சட்டம் C இல் 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோலில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எனவே $101_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 110_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும்.

எண்களைக் கீழ்நோக்கி எழுதிக் கூட்டும்போது இதனை மேலும் விளங்கலாம்.

$$\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ +\quad 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

வழக்கம் போல் எண்களைக் கூட்டும்போது வலது பக்கத்திலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும்.
முதலில் 2^0 கள் 1 + 2^0 கள் 1 = 2^1 கள் 1 + 2^0 கள் 0
2^1 கள் 1 + 2^1 கள் 0 = 2^1 கள் 1

உதாரணம் 1

பெறுமானம் காண்க.

(i) $11101_{\text{இரண்டு}} + 1101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $1110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}}$

(i)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ \ 1\ \ } \\ 11101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 101010_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ \ \ \ } \\ 1110_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 10101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

குறிப்பு

துவித எண்களைக் கூட்டும்போது

$1_{\text{இரண்டு}} + 0_{\text{இரண்டு}} = 1_{\text{இரண்டு}}$

$1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 10_{\text{இரண்டு}}$

$1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 11_{\text{இரண்டு}}$

எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 2.3

1. பெறுமானம் காண்க.

a.
$$\begin{array}{r} 111_{\text{இரண்டு}} \\ +101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 10111_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1011_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 1011_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 11101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

d. $11101_{\text{இரண்டு}} + 1110_{\text{இரண்டு}}$

e. $11011_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}}$

f. $100111_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}}$

g. $11_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} + 1111_{\text{இரண்டு}}$

h. $11110_{\text{இரண்டு}} + 1110_{\text{இரண்டு}} + 110_{\text{இரண்டு}}$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள வெற்றுக்கூடுகளினுள் பொருத்தமான இலக்கங்களை இடுக.

a.
$$\begin{array}{r} 11_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 1\ 10\ \square_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \square1\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square100_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 10\ 0\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ \square\ 1\ \square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \square00\square\ 0_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{r} 1110_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 10\square01_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{r} 1\square1\square_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square000_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{r} 11\square1_{\text{இரண்டு}} \\ +1110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square\square1\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

2.4 துவித எண்களைக் கழித்தல்

துவித எண்களைக் கூட்டும்போது குறிப்பிட்ட இடப்பெறுமான நிரலில் 2 வரும்போது அதற்கு இடது பக்கத்தில் உள்ள இடப்பெறுமான நிரலில் 1 சேர்க்கப்படல் வேண்டும் எனப் பார்த்தோம்.

$$\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

(2^0 நிரலில் $1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 10_{\text{இரண்டு}}$)

இப்போது $110_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மேலே உள்ள கூட்டலை அவதானிக்கும்போது இதன் பெறுமானம் $101_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும். இவ்விடை பெறப்படும் விதத்தை விளங்குவோம்.

$$\begin{array}{r} 11\overset{2}{0}_{\text{இரண்டு}} \\ -\ \ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

2^0 என்ற நிரலில் 0 இலிருந்து 1 ஐக் கழிக்க முடியாததால் அடுத்துள்ள 2^1 நிரலிலிருந்து 1 ஐ எடுப்போம். அது 2^0 கள் 2 என்பதால் அதிலிருந்து 1 ஐக் கழிக்கும்போது மீதி 1 கிடைக்கும். 2^1 நிரலில் இப்போது காணப்படுவது 0 ஆகும்.

எனவே $110_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}} = 101_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

$$\begin{array}{r} 1101_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

$110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதன் மூலம் விடையை வாய்ப்புப் பார்ப்போம்.

$$110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} = 1101_{\text{இரண்டு}}$$

குறிப்பு

கழிக்கும்போது பெறப்படும் விடையைக் கழிக்கப்படும் எண்ணுடன் கூட்டுவதனால் விடையைச் சரியா என வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 2.4

1. பெறுமானம் காண்க.

a. $11_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}}$

b. $10_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}}$

c. $101_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}}$

d. $101_{\text{இரண்டு}} - 11_{\text{இரண்டு}}$

e. $111_{\text{இரண்டு}} - 11_{\text{இரண்டு}}$

f. $110_{\text{இரண்டு}} - 11_{\text{இரண்டு}}$

g. $1100_{\text{இரண்டு}} - 111_{\text{இரண்டு}}$

h. $10001_{\text{இரண்டு}} - 111_{\text{இரண்டு}}$

i. $100000_{\text{இரண்டு}} - 11011_{\text{இரண்டு}}$

j. $100011_{\text{இரண்டு}} - 10001_{\text{இரண்டு}}$

k. $11000_{\text{இரண்டு}} - 1111_{\text{இரண்டு}}$

l. $101010_{\text{இரண்டு}} - 10101_{\text{இரண்டு}}$

2.5 துவித எண்களின் பிரயோகம்

துவித எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தப்படும் இலக்கங்கள் 0 உம் 1 உம் ஆகும். 0, 1 என்பவற்றை வகைகுறிப்பதற்கு மின் சுற்றில் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் குமிழொன்று ஒளிர்வது 1 ஐயும் ஒளிராதிருப்பது 0 ஐயும் குறிப்பதாகக் கருதப்பட்டு இலக்கமுறை (Digital) உபகரணங்கள் தயாரிக்கப்படுகின்றன.

இதற்கேற்ப மின்குமிழ் ஒளிர்வதை ⊛ என்பதனாலும் ஒளிராதிருப்பதை ○ இனாலும் குறிக்கும்போது ⊛ ○ ○ ⊛ என்பது $1001_{\text{இரண்டு}}$ என்ற துவித எண்ணை வகைகுறிக்கின்றது. இத்தொழினுட்பத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிகருவி, கணினி என்பன உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு அடி இரண்டிலான எண்கள் உருவாக்கப்பட்டது போல வேறு அடிகளிலும் உருவாக்கப்பட்ட எண் தொகுதிகளின் மூலம் வெவ்வேறு விளையாட்டுகளும் விளையாட்டு உபகரணங்களும் உருவாக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு

அடி 2, 10 எண்களைப் போன்று வேறு அடிகளைப் பயன்படுத்தல்

அடி நான்கில் உருவாக்கப்படும் எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தப்படும் இலக்கங்கள் 0, 1, 2, 3 மட்டுமே ஆகும்.

$10_{\text{நான்கு}}$ என்பது குறிக்கும் எண் 4 ஆகும்.

அடி ஐந்திற்கு 0, 1, 2, 3, 4 ஆகிய இலக்கங்கள் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படும். $10_{\text{ஐந்து}}$ என்பது குறிக்கும் எண் 5 ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானம் காண்க.

a. $1101_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} - 1011_{\text{இரண்டு}}$ **b.** $11111_{\text{இரண்டு}} - (101_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}})$

c. $110011_{\text{இரண்டு}} - 1100_{\text{இரண்டு}} - 110_{\text{இரண்டு}}$

2. $1_{\text{இரண்டு}}$, $11_{\text{இரண்டு}}$, $111_{\text{இரண்டு}}$, $1111_{\text{இரண்டு}}$, $11111_{\text{இரண்டு}}$, $111111_{\text{இரண்டு}}$ என்ற ஒவ்வோர் எண்ணிலும் 1 கூடுதலான எண்ணைத் துவித எண்களாகத் தருக.

3. அடி பத்தில் 16 என்ற தசம எண்ணைத் துவித எண்ணாக எழுதுக.

4. (i) $49_{\text{பத்து}} - 32_{\text{பத்து}}$ ஐச் சுருக்கி துவித எண்களாகத் தருக.

(ii) $49_{\text{பத்து}}$, $32_{\text{பத்து}}$ ஆகிய எண்களைத் துவித எண்களாக மாற்றிக் கழிக்க. மேலே (i) இல் பெற்ற விடையுடன் உமது விடையை ஒப்பிடுக.

பொழிப்பு

- அடி இரண்டிலான எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தும் இலக்கங்கள் 0, 1 ஆகும்.
- அடி இரண்டிலான எண் தொகுதியில் $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$...... என்பன இடப்பெறுமானங்களாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- தசம எண் ஒன்றைத் துவித எண் ஒன்றாக மாற்றுவதற்கு அவ்வெண்ணை மீண்டும் மீண்டும் தொடர்ந்து ஈவு 0 வரும் வரை 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும். அப்போது மீதியாக வரும் இலக்கங்களைக் கொண்டு அவ்வெண் வகைகுறிக்கப்படும்.
- துவித எண் ஒன்றைத் தசம எண் ஒன்றாக மாற்றுவதற்கு அவ்வெண்ணை இடப்பெறுமானத்துக்குரிய இரண்டின் வலுக்களினால் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்.

3 பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

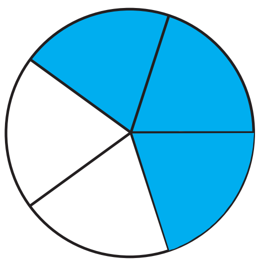
- ''இன்'' இடம்பெறும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- அடைப்புக்குறிகள் இடம்பெறும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- BODMAS ஒழுங்கு முறையை இனங்காண்பதற்கும் அதனைப் பயன்படுத்திப் பின்னங்கள் உள்ள பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பின்னங்கள்

இதற்கு முந்திய தரங்களில் பின்னங்கள் தொடர்பாக நாம் கற்றுள்ள விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

கீழே உள்ள வட்டத்தை 5 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றின் மூன்று பகுதிகள் நிழற்றப்பட்டுள்ளன.



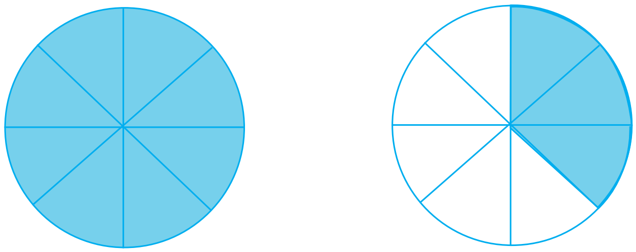
இந்நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் முழுப் பிரதேசத்தின் $\frac{3}{5}$ எனக் கூறலாம்.

வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கொண்டும் இதனை எடுத்துரைக்கலாம். அதாவது நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு உருவின் மொத்தப் பரப்பளவின் $\frac{3}{5}$ ஆகும். மொத்தப் பரப்பளவை ஓர் அலகாக எடுத்தால், நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு $\frac{3}{5}$ அலகுகளெனக் காட்டலாம்.

ஓர் அலகைச் சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்போது அதன் ஒரு பகுதியை அல்லது சில பகுதிகளை ஒரு பின்னமாகக் காட்டலாம். ஒரு கூட்டத்தில் உள்ள ஒரு பகுதியையும் பின்னமாகக் காட்டலாம். ஓர் உதாரணமாக மூன்று ஆண் பிள்ளைகளும் இரண்டு

பெண் பிள்ளைகளும் உள்ள ஐவரைக் கொண்ட குழு ஒன்றைக் கருதும்போது ஆண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை அக்குழுவின் $\frac{3}{5}$ எனக் காட்டலாம். இங்கு முழுக் குழுவையும் ஓர் அலகாகக் கருதும்போது ஆண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை $\frac{3}{5}$ எனக் காட்டலாம். இவ்வாறு காட்டப்படும் பூச்சியத்திற்கும் ஒன்றுக்குமிடையே உள்ள $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ போன்ற பின்னங்கள் முறைமைப் பின்னங்கள் எனப்படுமென நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள்.

கலப்பு எண்களையும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களையும் நினைவுகூர்வோம். பின்வரும் உருவில் உள்ள இரு சம வட்டங்களில் ஒரு வட்டம் முழுமையாகவும் மற்றைய வட்டத்தில் (8 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து) மூன்று பகுதிகளும் நிழற்றப் பட்டுள்ளன.



எனினும் ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கருதினால், நிழற்றப்பட்டுள்ள பின்னம் $1+\frac{3}{8}$ ஆகும். இதனைச் சுருக்கமாக $1\frac{3}{8}$ என எழுதலாம். இப்பின்னத்தை $\frac{11}{8}$ எனவும் காட்டலாம். இது ''முறைமையில்லாப் பின்னம்'' ஆகும். இங்கு ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கருதுவதன் மூலம் கலப்பு எண், முறைமையில்லாப் பின்னங்கள் ஆகிய இரண்டும் காட்டப்பட்டுள்ளன என்பதை நினைவிற் கொள்ளல் முக்கியமானதாகும். அதற்கேற்ப உதாரணங்களாக

$1\frac{1}{2}, 3\frac{2}{5}, 2\frac{3}{7}$ ஆகியன கலப்பெண்களாகும்.

$\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{4}$ ஆகியன முறைமையில்லாப் பின்னங்களாகும். $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{1}{1}$ போன்ற ஒன்றுக்குச் சமமான பின்னங்களும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களாகக் கருதப்படும்.

கலப்பெண்களை முறைமையில்லாப் பின்னங்களாக வகைகுறித்தல் பற்றியும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களைக் கலப்பெண்களாக வகைகுறித்தல் பற்றியும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். இதற்கு உதாரணமாக

(i) $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ என்பவற்றைக் காட்டலாம்.

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணால் (பூச்சியமல்லாத) பெருக்குவதன் மூலம் அல்லது வகுப்பதன் மூலம் முதற் பின்னத்திற்குச் சமவலுவான ஒரு பின்னத்தைப் பெறலாம்.
உதாரணங்களாக

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} \qquad \frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

பின்னங்களைக் கூட்டும்போதும் கழிக்கும்போதும் பகுதிகள் சமமாக இருக்கும்போது அவற்றை எளிதாகச் சுருக்கலாம். உதாரணமாக

(i) $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}$

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1 + 4 - 2}{5}$$
$$= \frac{3}{5}$$

பகுதிகள் சமமற்று இருக்கும்போது ஒரு பொதுப் பகுதி கிடைக்குமாறு சமவலுப் பின்னங்கள் எழுதப்படும். உதாரணமாக

(ii) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{5 \times 2}{6 \times 2}$$
$$= \frac{3}{12} + \frac{8}{12} - \frac{10}{12}$$
$$= \frac{3 + 8 - 10}{12}$$
$$= \frac{1}{12}$$

- இரு பின்னங்களைப் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் பின்னத்தின் தொகுதி இரு பின்னங்களினதும் தொகுதிகளின் பெருக்கமாகும். பகுதி இரு பின்னங்களினதும் பகுதிகளின் பெருக்கமாகும்.

(i) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{5 \times 3}$$
$$= \frac{2}{15}$$

(ii) $1\frac{1}{3} \times 1\frac{3}{4}$

$$1\frac{1}{3} \times 1\frac{3}{4} = \frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{7}{\cancel{4}}$$
(கலப்பெண்களை முறைமையில்லாப் பின்னங்களாக மாற்றல்)
$$= \frac{7}{3}$$
$$= 2\frac{1}{3}$$

- இரு எண்களின் பெருக்கம் 1 எனின், அவற்றில் ஓர் எண் மற்றைய எண்ணின் நிகர்மாற்று எனப்படும்.
  அதற்கேற்ப
  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ஆகையால்
  2 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{2}$ உம் $\frac{1}{2}$ இன் நிகர்மாற்று 2 உம் ஆகும்.

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் முறையே பகுதியாகவும் தொகுதியாகவும் மாற்றி எழுதும்போது அவ்வெண்ணின் நிகர்மாற்றைப் பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

அதாவது $\frac{a}{b}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{b}{a}$ ஆகும். (அவ்வாறே $\frac{b}{a}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{a}{b}$ ஆகும்.)

- ஓர் எண்ணை வேறோர் எண்ணால் வகுத்தல் என்பது முதல் எண்ணை இரண்டாம் எண்ணின் நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல் என நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளீர்கள். அதனைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

(i) $\frac{4}{3} \div 2$

$$\frac{4}{3} \div 2 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

(ii) $1\frac{2}{7} \div 1\frac{1}{2}$

$$1\frac{2}{7} \div 1\frac{1}{2} = \frac{9}{7} \div \frac{3}{2}$$
$$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{7} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$
$$= \frac{6}{7}$$

பின்னங்கள் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை மேலும் நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் இரு சமவலுப் பின்னங்கள் வீதம் எழுதுக.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{4}{8}$ (iv) $\frac{16}{24}$

2. பின்வரும் கலப்பெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் முறைமையில்லாப் பின்னமாகக் காட்டுக.

(i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $2\frac{3}{4}$ (iii) $3\frac{2}{5}$ (iv) $5\frac{7}{10}$

3. பின்வரும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களைக் கலப்பெண்களாகக் காட்டுக.

(i) $\frac{7}{3}$ (ii) $\frac{19}{4}$ (iii) $\frac{43}{4}$ (iv) $\frac{36}{7}$

4. பெறுமானம் காண்க.

(i) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{12}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

(iv) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}$ (v) $3\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}$ (vi) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}$

5. சுருக்குக.

(i) $\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}$ (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}$ (iii) $1\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{2}$ (iv) $3\frac{3}{10}\times 2\frac{1}{3}\times 4\frac{2}{7}$

6. பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகர்மாற்றை எழுதுக.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) 5 (v) $2\frac{3}{5}$

7. சுருக்குக.

(i) $\frac{6}{7}\div 3$ (ii) $8\div\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{9}{28}\div\frac{3}{7}$ (iv) $5\frac{1}{5}\div\frac{6}{7}$ (v) $1\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{4}$

3.1 '' இன் '' இடம்பெறும் கோவைகளுக்குரிய பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

ரூ. 100 இன் $\frac{1}{2}$ ஆனது ரூ. 50 என்பதை நாம் அறிவோம்.

இது ரூ. 100 இன் அரைவாசி எனவும் 100 ஐ 2 இனால் வகுப்பதன் மூலம் இதனைப் பெறலாம் என்பதையும் நாம் அறிவோம்.

அதனை ரூ. $100\div 2$ என எழுதலாம்.

அதாவது ரூ. $100\times\frac{1}{2}$ ஆகும் (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்).

அதற்கேற்ப 100 இன் $\frac{1}{2} = \overset{50}{\cancel{100}}\times\frac{1}{\cancel{2}} = 50$

மேற்குறித்த விடயங்களுக்கேற்ப 100 இன் $\frac{1}{2} = 100\times\frac{1}{2}$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறு 20 இன் $\frac{1}{5}$ எவ்வளவெனப் பார்ப்போம்.

இந்த அளவு, அதாவது 20 ஐ 5 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றில் ஒரு பகுதியாகும்.

$20 \div 5$ என எழுதலாம்.

அதாவது $20 \times \frac{1}{5}$ ஆகும் (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்).

அதற்கேற்ப $\overset{4}{\cancel{20}} \times \frac{1}{\cancel{5}} = 4$.

மேற்குறித்த விடயங்களுக்கு ஏற்ப 20 இன் $\frac{1}{5} = 20 \times \frac{1}{5}$ என எழுதலாம்.

> மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்ப ''இன்'' இற்குப் பதிலாகப் பெருக்கல் என்னும் கணிதச் செய்கையைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

ரூ. 100 இன் $\frac{1}{2} =$ ரூ. $100 \times \frac{1}{2}$

20 இன் $\frac{1}{5} = 20 \times \frac{1}{5}$

இப்போது $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ எவ்வளவெனப் பார்ப்போம்.
இதனைப் பின்வருமாறு உருக்களின் மூலம் காட்டுவோம்.
ஓர் அலகை மூன்று சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்போது அவற்றில் ஒரு பகுதி $\frac{1}{3}$ ஆகும்.



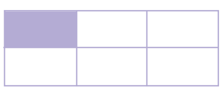
இந்த அளவை ஓர் அலகாக எடுக்கும்போது அதன் $\frac{1}{3}$ அளவு கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

$\frac{1}{3}$



இந்நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் $\frac{1}{2}$ ஐ வேறுபடுத்திக் காட்டுவோம்.

$\frac{1}{2}$

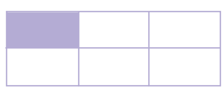


இதற்கேற்ப

$\frac{1}{3}$



$\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ அதாவது $\frac{1}{6}$ ஆகும்.



உருவிற்கேற்ப $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ ஆனது $\frac{1}{6}$ ஆகும் என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது ஒரு குறித்த அலகில் $\frac{1}{3}$ ஐ எடுத்து அந்த $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ ஐ எடுத்தால் கிடைக்கும் பகுதி தொடக்க அலகின் $\frac{1}{6}$ இற்குச் சமமாகும்.

எனினும், பின்னங்களைப் பெருக்கல் பற்றி நாம் கற்றுள்ளவாறு $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ என நாம் எடுத்துரைக்கலாம்.

மேலும் ஓர் உதாரணத்தை எடுத்து இதனை உறுதிப்படுத்துவோம். அதற்காக $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஐக் காண்போம்.

இதற்காக ஓர் அலகாகப் பின்வரும் செவ்வகப் பிரதேசத்தைக் கருதுவோம்.

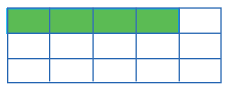


$\frac{4}{5}$



→ $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$

$\frac{4}{15}$



உருவிற்கேற்ப $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஆனது $\frac{4}{15}$ என்பது தெளிவாகும்.

மேலும் $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

இதற்கேற்ப $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$ என எழுதலாம்.

$\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஆகியவற்றில் 'இன்' மூலம் காட்டப்படும் விடயங்களுக்குப் பதிலாகப் பெருக்கற் கணிதச் செய்கையைப் பிரயோகித்துப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம் என்பது தெளிவாகும்.

உதாரணம் 1

$\frac{2}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\frac{2}{3}$ இன் $\frac{1}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}_{1}}$ ("இன்" இற்கு × ஐப் பிரயோகித்தல்)

$= \frac{1}{3}$

உதாரணம் 2

$1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3}$ எவ்வளவு?

$1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3} = \frac{{}^{3}\cancel{9}}{5} \times \frac{2}{\cancel{3}_{1}}$

$= \frac{6}{5}$

$= 1\frac{1}{5}$

உதாரணம் 3

500 m இன் $\frac{3}{5}$ எத்தனை மீற்றர்களாகும்?

$$500 \text{ இன் } \frac{3}{5} = \overset{100}{\cancel{500}} \times \frac{3}{\cancel{5}_1}$$

$$= 300 \text{ m}$$

பயிற்சி 3.1

1. சுருக்குக.

(i) $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{5}{8}$ இன் $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{11}$ இன் $\frac{5}{6}$

(v) $1\frac{3}{4}$ இன் $\frac{2}{7}$ (vi) $2\frac{5}{8}$ இன் $1\frac{1}{3}$ (vii) $5\frac{1}{2}$ இன் $1\frac{3}{11}$ (viii) $1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{5}{9}$

2. பெறுமானம் காண்க.

(i) ரூ. 64 இன் $\frac{3}{4}$ எத்தனை ரூபாய்? (ii) 400 g இன் $\frac{2}{5}$ எத்தனை கிராம்?

(iii) 6 ha இன் $\frac{1}{3}$ எத்தனை ஹெக்ரெயர்? (iv) 1km இன் $\frac{1}{8}$ எத்தனை மீற்றர்?

3. ஒரு காணியின் $\frac{3}{5}$ இற்கு உரித்தான ஒருவர் அதில் $\frac{1}{3}$ ஐத் தனது மகளுக்குக் கொடுக்கும்போது கிடைக்கும் காணிப் பகுதி மொத்தக் காணியில் என்ன பின்னம்?

4. நிமலனின் மாத வருமானம் ரூ. 40 000 ஆகும். அவர் அப்பணத்தின் $\frac{1}{8}$ ஐப் பயணச் செலவுகளுக்காகப் பயன்படுத்துகின்றார். அப்பணம் எவ்வளவு?

3.2 அடைப்புக்குறிகளுடனான கோவைகளை BODMAS ஒழுங்குக்கு அமையச் சுருக்குதல்

அடைப்புகள் உள்ள ஒரு கோவையில் (அல்லது அட்சரகணிதக் கோவையில்) கூட்டல், கழித்தல், வகுத்தல், பெருக்கல், வலுவுக்கு உயர்த்தல் போன்ற பல கணிதச் செய்கைகள் இடம்பெறலாம். அத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் கணிதச் செய்கைகள் செய்யப்படும் ஒழுங்குமுறை பற்றிய ஒரு பொது வழக்கும் அவ்வழக்கை எடுத்துகாட்டும் விதிகளும் இருத்தல் வேண்டும். இவ்வாறான சில விதிகள் பற்றி நீங்கள் தரம் 7 இல் கற்றுள்ளீர்கள். தற்போது இதற்கு மேலதிகமாக BODMAS என அழைக்கப்படும் செய்கைகளின் ஒழுங்குமுறை பற்றி விரிவாகப் பார்ப்போம்.

BODMAS இல் உள்ள ஆங்கில எழுத்துகளினால் முறையே அடைப்பு (bracket), இன்/வலு (of / order), வகுத்தல் (division), பெருக்கல் (multiplication), கூட்டல் (addition), கழித்தல் (subtraction) ஆகியன காட்டப்படுகின்றன. கோவைகளைச் சுருக்கும்போது இந்த எழுத்துகளினால் காட்டப்படும் ஒழுங்குமுறையில் முன்னுரிமை அளித்து கணிதச் செய்கைளைச் செய்து சுருக்க வேண்டிய போதிலும் சில கணிதச் செய்கைகளின் முன்னுரிமைகள் சமமாகும். பெருக்கலும் வகுத்தலும் சம முன்னுரிமைகள் இருக்கும் அதே வேளை கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் உள்ளன. இதற்கேற்பக் கோவைகளைப் பின்வரும் ஒழுங்கு முறையில் சுருக்குதல் வேண்டும்.

1. முதலில் அடைப்புகளுடனான கோவைகள் இருப்பின் அவற்றைச் சுருக்குதல் வேண்டும்.

2. இரண்டாவதாக ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கையை அல்லது வலுவைச் (அதாவது கோவையில் இடம்பெறும் வலுவை) சுருக்குதல் வேண்டும்.

* வலு இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குதல் பாடவிதானத்தில் உள்ளடக்கப் படவில்லை.

3. மூன்றாவதாக வகுத்தலையும் பெருக்கலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு வகுத்தலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் சம முன்னுரிமை இருக்கும் அதே வேளை அவ்விரு கணிதச் செய்கைகளும் இருப்பின் இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கலைச் செய்யும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4. நான்காவதாகக் கூட்டலையும் கழித்தலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு இரு கணிதச் செய்கைகளுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் அளிக்கப்படும் அதே வேளை மேலே 3 இல் உள்ளவாறு இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

இங்கு BODMAS விதிகளைப் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும் பயன்படுத்தலாம். எனினும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளில் ''இன்'' பயன்படுத்தப்படும் சந்தர்ப்பங்களும் உள்ளன. உதாரணமாக

$$\frac{6}{25} \text{ இன் } \frac{5}{12} \text{ ஐக் காட்டலாம்.}$$

இக்கோவையின் கருத்து

$$\frac{6}{25} \times \frac{5}{12} \text{ என்பதாகும்.}$$

ஓரளவு சிக்கலான கோவையாகிய $\frac{2}{3} \div \frac{6}{25}$ இன் $\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}$ ஐச் சுருக்கத்தக்க விதம் பற்றிய ஒரு பொது இணக்கம் தேவை. அதில் "இன்" என்பதற்கு $\div$, $\times$ ஆகியவற்றிலும் பார்க்கக் கூடுதலான முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

குறிப்பு

"$\frac{6}{25}$ இன் $\frac{5}{12}$" என்பது ஆங்கில மொழியில் "$\frac{5}{12}$ of $\frac{6}{25}$" என எழுதப்படும். ''வலுவுக்கு உயர்த்தல்'', ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கைகளுக்குச் சம முன்னுரிமை இருக்கின்றமையால், சில சந்தர்ப்பங்களில் BODMAS இல் உள்ள எழுத்து O இன் மூலம் "Of ", "Order " என்னும் இரு கணிதச் செய்கைகளும் காட்டப்படுவதாகக் கருதப்படும். ஆனால் இப்பாடத்தில் ''Of'' மட்டும் இடம்பெறும் கோவைகள் மட்டும் காணப்படும்.

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \frac{3}{2}$ இன் $\frac{4}{3}$ என்னும் பின்னங்கள் இடம்பெறும் கோவையை BODMAS ஒழுங்குமுறைக்கு ஏற்பச் சுருக்கும் முறையைப் பார்ப்போம்.

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \frac{3}{2}$ இன் $\frac{4}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right)$ (முதலில் செய்யவேண்டிய ''இன்'' இற்காக $\times$ ஐப் பிரயோகித்து அது முதலில் செய்யப்பட வேண்டும் என்பதற்காக அடைப்புகளை இடுவோம்.)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div 2$

$= \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}\right) \div 2$ (அடுத்ததாகச் செய்ய வேண்டிய கணிதச் செய்கைக்காக அடைப்புகளை இடுவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2}$ (இரண்டினால் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}$ இனால் பெருக்குவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}\right)$ (முதலில் செய்ய வேண்டிய கணிதச் செய்கையைக் காட்டுவதற்கு அடைப்புகளை இடுவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$

$= \frac{6}{24} + \frac{5}{24}$ (இரு பின்னங்களையும் ஒரு பொதுப் பகுதியுடன் எழுதுவதன் மூலம்)

$= \frac{11}{24}$

குறிப்பு

உண்மையில் ஒரு கோவையில் அடைப்புகளை இட்டுக் கணிதச் செய்கைகள் நடைபெறும் விதத்தை எளிதாகக் காட்டலாம்.

$\frac{5}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{5}$ இன் $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} \div \frac{8}{9}$ ஐ BODMAS விதிகளுக்கேற்பச் செய்ய வேண்டிய விதத்தைப் பின்வருமாறு அடைப்புகளுடன் காட்டலாம்.

$$\left(\frac{5}{4} \times \frac{3}{4}\right) - \left(\left(\left(\frac{1}{5} \text{ இன் } \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{3}\right) \div \frac{8}{9}\right)$$

அடைப்புகளை இடுவதால் பிரதிகூலங்களும் உள்ளன. அடைப்புகளை இடும்போது கிடைக்கும் கோவை நீண்டதாக இருக்கும் அதே வேளை அது சிக்கலானதாகவும் காணப்படும். கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி இத்தகைய ஒரு கோவையைச் சுருக்கும்போது இவ்வடைப்புகளைக் கவனமாக இடுதல் வேண்டும். இதற்குத் தாமதமும் ஏற்படலாம். இத்தகைய பல காரணங்களுக்காக, அடைப்புகள் இல்லாத கோவைகள் எழுதப்படும்போது அவை சுருக்கப்படும் விதம் பற்றிய வழக்கிற்கு வருதல் முக்கியமானது. விசேடமாகக் கணினிகள், கணிகருவிகள் ஆகியவற்றை உற்பத்தி செய்கையில் இத்தகைய வழக்கு முக்கியமானதாகும். ஆயினும் விடயங்கள் அவ்வாறு இருப்பினும் முழு உலகமும் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்க ஒரு பொது வழக்கு இதுவரையும் ஏற்படுத்தப்படவில்லை. உலகில் பல்வேறு நாடுகள் வெவ்வேறு வழக்குகளைப் பயன்படுத்துகின்றன. ஓர் உதாரணமாக வெவ்வேறு வகைக் கணிகருவிகளை உற்பத்திசெய்யும் கம்பனிகள் பல்வேறு வழக்குகளைத் தமது கணிகருவி நிகழ்ச்சி நிரலில் பயன்படுத்துகின்றன.

BODMAS வழக்கைப் பயன்படுத்திப் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகள் சுருக்கப்படும் விதம் பற்றி மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$ இன் $\frac{4}{10}$ ஐச் சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) \text{ இன் } \frac{4}{10} = \left(\frac{2}{12} + \frac{3}{12}\right) \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{1}{6}$$

உதாரணம் 2

$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ இன் $\left(1\frac{2}{5}\div 2\frac{1}{3}\right)$ ஐச் சுருக்குக.

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) \text{ இன் } \left(1\frac{2}{5}\div 2\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\right) \text{ இன் } \left(\frac{7}{5}\div\frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\times\left(\frac{\cancel{7}^{1}}{5}\times\frac{3}{\cancel{7}_{1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}_{2}}\times\frac{\cancel{3}^{1}}{5}$$

$$= \frac{1}{10}$$

பயிற்சி 3.2

1. சுருக்கி, விடையை மிக எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}$ (ii) $3\frac{1}{3}\div 2\frac{1}{6}$ இன் $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

(iv) $\left(3\frac{1}{3}\div 2\frac{1}{6}\right)$ இன் $\frac{1}{4}$ (v) $3\frac{3}{4}\div\left(2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}\right)$ (vi) $\left(1\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

(vii) $2\frac{2}{3}\times\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)\div 2\frac{1}{3}$ (viii) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ இன் $\frac{5}{6}\div\frac{7}{18}$

2. ஒருவர் தனது வருமானத்தில் $\frac{1}{4}$ ஐ உணவுக்கும் $\frac{1}{2}$ ஐ வியாபாரத்திற்கும் எஞ்சிய பகுதியைச் சேமிப்புக்கும் ஒதுக்கியுள்ளார். சேமிக்கும் பகுதி மொத்த வருமானத்தில் என்ன பின்னமாகும்?

3. குமுதினி ஒரு பயணத்தின் மொத்தத் தூரத்தில் $\frac{1}{8}$ ஐ நடந்தும் $\frac{2}{3}$ ஐப் புகையிரதத்திலும் எஞ்சிய தூரத்தைப் பேருந்திலும் சென்றார்.

(i) நடந்தும் புகையிரதத்திலும் சென்ற தூரங்களை மொத்தத் தூரத்தின் பின்னமாகக் காட்டுக.
(ii) பேருந்தில் சென்ற தூரத்தை மொத்தத் தூரத்தின் பின்னமாகக் காட்டுக.

4. தந்தையொருவர் தன்னிடம் உள்ள காணியில் $\frac{1}{2}$ ஐத் தனது மகனுக்கும் $\frac{1}{3}$ ஐத் தனது மகளிற்கும் கொடுத்தார். மகன் தனது பங்கில் $\frac{1}{5}$ ஐயும் மகள் தனது பங்கில் $\frac{2}{5}$ ஐயும் தொண்டர் நிறுவனம் ஒன்றிற்கு நன்கொடையாகக் கொடுத்தனர். அத்தொண்டர் நிறுவனம் அதற்குக் கிடைத்த காணியில் $\frac{1}{2}$ இல் கட்டடம் ஒன்றைக் கட்டத் தீர்மானித்தது. முழுக் காணியில் (ஆரம்பத்தில் இருந்த) என்ன பங்கில் கட்டடம் அமைந்துள்ளது.



மேலதிக அறிவிற்கு

$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$ என்னும் எண் கோவையை BODMAS ஒழுங்கு முறையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு சுருக்கலாம் எனப் பார்ப்போம்.

$$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$$

1. முதலில் அடைப்புகளினுள்ளே இருக்கும் கோவை $4 + 1$ ஐச் சுருக்கல் வேண்டும். அது 5 ஆகும். அப்போது

$$8 - 3 \times 5 + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$$

2. அதன் பின்னர் 3^2 என்னும் வலுவைச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 9 ஆகும். அப்போது $8 - 3 \times 5 + 12 \div 3 \times 9 \div 4$

3. • அதன் பின்னர் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் இடமிருந்து வலமாக ஒவ்வொன்றாகச் செய்தல் வேண்டும். 3×5 உள்ளது. அது 15 ஆகும்.

$$8 - 15 + 12 \div 3 \times 9 \div 4$$

• அதன் பின்னர் $12 \div 3$ ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 4 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 4 \times 9 \div 4$$

• அதன் பின்னர் 4×9 ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 36 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 36 \div 4$$

• அதன் பின்னர் $36 \div 4$ ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 9 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 9$$

4. • இப்போது கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் சம முன்னுரிமை இருப்பதனால் இடமிருந்து வலமாகக் கணிதச் செய்கை நடைபெறும்.

$$-7 + 9$$

• இறுதியாக $-7 + 9 = 2$ கிடைக்கும்.

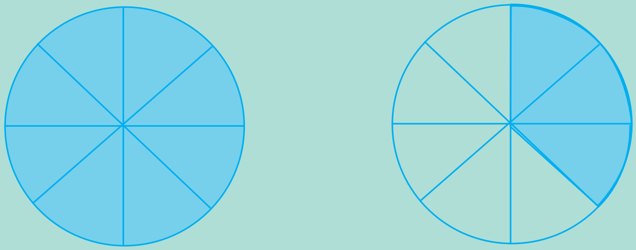
இதற்கேற்ப BODMAS விதிகளுக்கமையச் சுருக்கும்போது

$$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4 = 2.$$



மேலதிக அறிவிற்கு

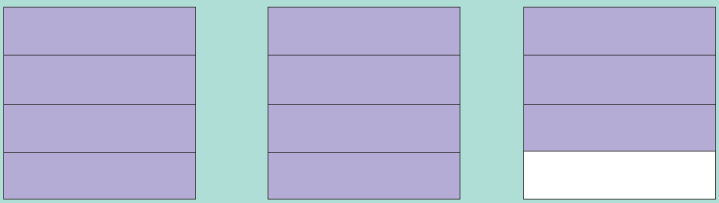
இந்தப் பாடத்தில் பக்க எண் 29 இல் உள்ள இவ்வுருவை மீண்டும் கருதுவோம்.



இதில் உள்ள ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் $1\frac{3}{8}$ அதாவது $\frac{11}{8}$ எனப் பார்த்தோம்.

இப்போது இதில் உள்ள இரு வட்டங்களையும் ஓர் அலகாகக் கருதினால் நிழற்றப்பட்ட பின்னம் $\frac{11}{16}$ ஆகும்.

தற்போது இதனைக் கொண்டு கீழே உள்ள உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.



இங்கு சதுரத்தை ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் $2\frac{3}{4}$ ஆகும். அதாவது $\frac{11}{4}$ ஆகும்.

a. 3 சதுரங்களையும் ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் யாது?

b. இரண்டு செவ்வகக் கீலங்களை ஓர் அலகாகக் ($\frac{1}{2}$ சதுரத்தை) கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் யாது?

விடைகள்

a. $\frac{11}{12}$ **b.** $5\frac{1}{2}$

மேலதிக அறிவிற்கு எனத் தரப்பட்டுள்ள விடயங்கள் பாடத்திட்டத்தில் உள்ளடக்கப்படவில்லை. ஆகவே இவை தொடர்பாக மதிப்பிடப்படமாட்டாது.

பொழிப்பு

- பின்னங்களைச் சுருக்குவதற்கு BODMAS ஒழுங்குமுறைக்கமையப் பின்வரும் ஒழுங்கில் எண் கோவைகள் சுருக்கப்படும்.

1. முதலில் அடைப்புகளுடனான கோவைகள் இருப்பின் அவற்றைச் சுருக்குதல் வேண்டும்.

2. இரண்டாவதாக ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கையை அல்லது வலுவைச் (அதாவது கோவையில் இடம்பெறும் வலுவை) சுருக்குதல் வேண்டும்.

➤ வலு இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குதல் பாடவிதானத்தில் உள்ளடக்கப் படவில்லை.

3. மூன்றாவதாக வகுத்தலையும் பெருக்கலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு வகுத்தலுக்கும் பெருக்கலும் சம முன்னுரிமை இருக்கும் அதே வேளை அவ்விரு கணிதச் செய்கைகளும் இருப்பின் இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கலைச் செய்யும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4. நான்காவதாகக் கூட்டலையும் கழித்தலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு இரு கணிதச் செய்கைகளுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் அளிக்கப்படும் அதே வேளை மேலே 3 இல் உள்ளவாறு இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4 சதவீதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- வணிகத்தில் கிடைக்கும் இலாபத்தை அல்லது நட்டத்தை அளவுரீதியாகக் காண்பதற்கும்
- இலாபத்தின் அல்லது நட்டத்தின் சதவீதத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- கழிவு, தரகு என்பவை யாவை என அறிந்து கொள்வதற்கும்
- குறித்த விலை, கழிவு, தரகு என்பன தொடர்பான கணித்தல்களைச் செய்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

4.1 இலாபமும் நட்டமும்



நாம் அன்றாடம் பயன்படுத்தும் அனேகமானவை வியாபார நிலையங்களில் வாங்கிய பொருள்களேயாகும். அப்பொருள்களை விற்பனை செய்வோர் வியாபாரிகள் எனவும் அப்பொருள்களை வாங்குவோர் வாடிக்கையாளர்கள் (நுகர்வோர்) எனவும் அழைக்கப்படுவர்.

வியாபாரிகள் அவர்கள் உற்பத்திசெய்த பொருள்களை அல்லது வேறொரு நபரிடம் வாங்கிய பொருள்களையே விற்கின்றனர். அவ்வாறு உற்பத்திசெய்யும்போது அல்லது வாங்கும்போது யாதாயினுமொரு செலவைச் செய்ய வேண்டியேற்படும். இவ்வாறு செலவொன்றைச் செய்து பெற்றுக்கொண்ட ஒரு பொருள் செலவு செய்த தொகையிலும் கூடிய விலையில் விற்கப்படும். இவ்வாறு விற்கும்போது வியாபாரிக்கு அவ்வியாபாரத்தினால் ஓர் **இலாபம்** கிடைக்கின்றது எனக் கூறப்படும்.
எப்போதும் ஒரு வியாபாரி தனது பொருள்களை இலாபமுடையதாக விற்க

முடியாது. உதாரணமாகப் பொருள்கள் பழுதடைதல் அல்லது காலாவதியாவதற்கு அண்மித்தல் காரணமாக அப்பொருள்களைச் செலவு செய்யப்பட்ட தொகையிலும் குறைந்த விலையில் விற்கவேண்டி ஏற்படும். இவ்வாறு விற்கும்போது வியாபாரிக்கு அவ்வியாபாரத்தினால் ஒரு **நட்டம்** ஏற்படுகிறது எனக் கூறப்படும். வியாபாரி யாதாயினுமொரு பொருளைப் பெற்றுக்கொள்ள முதலீடு செய்த தொகைக்கே அப்பொருளை விற்றால் அங்கு இலாபமோ நட்டமோ ஏற்படாது.

இதற்கேற்ப
விற்பனை விலை (வருமானம்) $>$ செலவினம் ஆயின்,
அப்போது ஓர் இலாபம் கிடைப்பதுடன்

இலாபம் = விற்பனை விலை − செலவினம்

என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும். அவ்வாறே
செலவினம் $>$ விற்பனை விலை ஆயின் அப்போது நட்டம் ஏற்படுவதுடன்

நட்டம் = செலவினம் − விற்பனை விலை

என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும்.

குறிப்பு

செலவினம் எனப்படுவது ஒரு பொருளை விற்பனை நிலைக்குக் கொண்டு வரும்வரை ஏற்படும் செலவுகள் ஆகும் (உதாரணம்: உற்பத்திச் செலவு, கொள்விலை போன்றவை).

உதாரணம் 1

பாதணிகளை உற்பத்திசெய்யும் ஒரு நிறுவனம் ஒரு சோடி பாதணிகளை உற்பத்திசெய்வதற்கு ரூ. 1 000 ஐச் செலவு செய்கின்றது. அந்நிறுவனம் ஒரு சோடி பாதணிகளை ரூ. 2 600 இற்கு விற்பனை செய்கின்றது. ஒரு சோடிப் பாதணிகளை விற்பதன் மூலம் நிறுவனம் பெறும் இலாபத்தைக் காண்க.

ஒரு சோடி பாதணிகளின் உற்பத்திச் செலவு = ரூ. 1 000

விற்பனை விலை = ரூ. 2 600

∴ பெற்ற இலாபம் = ரூ. 2 600 − 1 000

= ரூ. 1 600

உதாரணம் 2

ஒரு வியாபாரி ஒன்று ரூ. 45 வீதம் வாங்கிய 50 தேங்காய்களை ஒன்று ரூ. 60 வீதம் விற்றால் அவ்வியாபாரத்தினால் அவன் பெற்ற இலாபத்தைக் கணிக்க.

முறை I



தேங்காய்களை வாங்கிய விலை = ரூ. 45×50
= ரூ. 2 250

தேங்காய்களை விற்றுப் பெற்ற பணம் = ரூ. 60×50
= ரூ. 3 000

தேங்காய்களை விற்பதால் பெற்ற இலாபம் = ரூ. 3 000 – 2 250
= ரூ. 750

முறை II

ஒரு தேங்காயை வாங்கிய விலை = ரூ. 45

ஒரு தேங்காயை விற்ற விலை = ரூ. 60

ஒரு தேங்காயை விற்பதால் பெற்ற இலாபம் = ரூ. 60 – 45
= ரூ. 15

தேங்காய்களை விற்பதால் பெற்ற இலாபம் = ரூ. 15×50
= ரூ. 750

உதாரணம் 3

ஒரு வியாபாரி ஒன்று ரூ. 20 வீதம் வாங்கிய 100 மாம்பழங்களைப் போக்குவரத்தின் போது ஏற்பட்ட சேதத்தின் காரணமாக ஒன்று ரூ. 18 வீதம் விற்பதற்குத் தீர்மானித்தான். வியாபாரி அடைந்த நட்டத்தைக் கணிக்க.

முறை I



மாம்பழங்களை வாங்கிய விலை = ரூ. 20×100
= ரூ. 2 000

மாம்பழங்களை விற்பதால் பெற்ற பணம் = ரூ. 18×100
= ரூ. 1 800

மாம்பழங்களை விற்பதால் அடைந்த நட்டம் = ரூ. 2 000 – 1 800
= ரூ. 200

முறை II

ஒரு மாம்பழத்தை வாங்கிய விலை	= ரூ. 20
ஒரு மாம்பழத்தை விற்ற விலை	= ரூ. 18
ஒரு மாம்பழத்தை விற்பதால் அடையும் நட்டம்	= ரூ. 20 – 18
	= ரூ. 2
மாம்பழங்களை விற்பதால் அடைந்த நட்டம்	= ரூ. 2×100
	= ரூ. 200

உதாரணம் 4

ஒரு வியாபாரி 60 kg மரவள்ளிக் கிழங்கை கிலோ ஒன்று ரூ. 50 வீதம் விவசாயிகளிடமிருந்து வாங்கினான். வியாபாரி முதல் நாளில் 20 kg ஐ 1 kg ரூ. 70 வீதம் விற்றான். எஞ்சியதை அடுத்த நாள் முதலில் 15 kg ஐ 1 kg ரூ. 60 வீதமும் மேலும் 5 kg ஐ 1 kg ரூ. 50 வீதமும் அடுத்த 10 kg ஐ 1 kg ரூ. 40 வீதமும் விற்பனை செய்வதுடன் எஞ்சிய 10 kg ஐ விற்பனை செய்ய முடியாது ஒதுக்கி விட்டான். வியாபாரி மரவள்ளிக் கிழங்கு வியாபாரத்தில் அடைந்தது இலபமா அல்லது நட்டமா என்பதைத் தீர்மானித்து அந்த இலாபம் அல்லது நட்டம் எவ்வளவு எனக் காண்க.

மரவள்ளிக் கிழங்கை வாங்குவதற்கு செலவாகிய பணம்	= ரூ. 50×60
	= ரூ. 3 000
முதல் நாளில் விற்பனையால் பெற்ற பணம்	= ரூ. 70×20
	= ரூ. 1 400
இரண்டாம் நாளில் முதல் 15 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம்	= ரூ. 60×15
	= ரூ. 900
அடுத்த 5 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம்	= ரூ. 50×5
	= ரூ. 250
அடுத்த 10 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம்	= ரூ. 40×10
	= ரூ. 400
மரவள்ளிக் கிழங்கு விற்பனையால் பெற்ற மொத்தப் பணம்	= ரூ. 1 400 + 900 + 250 + 400
	= ரூ. 2 950

$3000 > 2950$ என்பதால் வியாபாரி நட்டம் அடைந்துள்ளான்.

வியாபாரி அடைந்த நட்டம்	= ரூ. 3000 − 2950
	= ரூ. 50

பயிற்சி 4.1

1. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

பொருள்	கொள்விலை/ உற்பத்திச் செலவு (ரூ.)	விற்பனை விலை (ரூ.)	இலாபம் /நட்டம்	இலாபம் /நட்டப் பெறுமானம் (ரூ.)
கைக்கடிகாரம்	500	750	....	....
பாடசாலைப் புத்தகப் பை	1 200	1 050	....	....
கணிகருவி	....	1 800	இலாபம்	300
பானப் போத்தல்	....	750	நட்டம்	175
தண்ணீர்ப் போத்தல்	350	....	நட்டம்	50
கணித உபகரணப்பெட்டி	275	....	இலாபம்	75
குடை	....	450	நட்டம்	100
பாதணி	....	700	இலாபம்	150

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சோடி சந்தர்ப்பங்களிலும் கூடிய இலாபமுடைய வியாபாரம் எதுவெனத் தெரிக.

   (i) ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய மாங்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்
   ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய தோடம்பழங்களை ரூ. 55 வீதம் விற்றல்

   (ii) ரூ. 40 வீதம் வாங்கிய தேங்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்
   ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய ஈரப்பலாக்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்

   (iii) ரூ. 10 வீதம் வாங்கிய ஒரு பேனாவை ரூ. 15 வீதம் விற்றல்
   ரூ. 25 வீதம் வாங்கிய ஒரு புத்தகத்தை ரூ. 28 வீதம் விற்றல்

3. ஒரு வியாபாரி ரூ. 3 வீதம் 100 றம்புட்டான் பழங்களை வாங்கி அவற்றில் 10 பழங்கள் சேதமானதால் வைத்துக்கொண்டு எஞ்சியவற்றை ரூ. 5 வீதம் விற்றான். இவ்வியாபாரத்தின் மூலம் அவன் அடைவது இலாபமா, நட்டமா என்பதைத் தீர்மானித்து அவ்விலாபம் அல்லது நட்டம் யாது எனக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி 1 கிலோகிராம் ரூ. 60 வீதம் 50 kg போஞ்சியை வாங்கினான். முதல் தினத்தில் 1 கிலோகிராம் ரூ. 75 வீதம் 22 kg போஞ்சியையும் இரண்டாம் தினத்தில் 1 கிலோகிராம் ரூ. 70 வீதம் எஞ்சிய போஞ்சியையும் விற்றான்.

   (i) வியாபாரி ஒவ்வொரு தினமும் பெற்ற இலாபத்தைத் தனித்தனியே கணித்து எத்தினத்தில் கூடிய இலாபம் பெறப்பட்டது என்பதைத் தீர்மானிக்க.

   (ii) வியாபாரி இரண்டு தினங்களிலும் பெற்ற மொத்த இலாபத்தைக் காண்க.

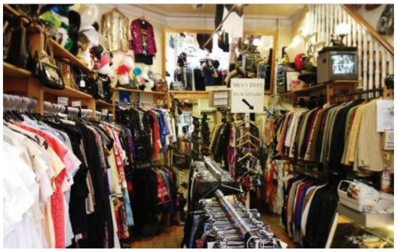
5. ஒரு பிரம்புக் கதிரையின் உற்பத்திச் செலவு ரூ. 650 ஆகும். ஓர் உற்பத்தியாளர் அவ்வாறான 20 கதிரைகளை உற்பத்திசெய்தான். இக்கதிரைகள் அனைத்தையும் விற்று ரூ. 7 000 ஐ இலாபமாகப் பெற அவன் எண்ணினான். இதற்காக அவன் ஒரு கதிரையை விற்க வேண்டிய விலை யாது ?

6. ஒரு மொத்த விற்பனையாளரிடம் அப்பிள்களை வாங்கி அவற்றை விற்பனை செய்யும் ஒரு சில்லறை வியாபாரி குறித்த ஒரு தினத்தில் 200 அப்பிள்களை ஒன்று ரூ. 25 வீதம் வாங்கினான். அன்றைய தினம் அவை அனைத்தையும் விற்பதன் மூலம் ரூ. 1000 ஐ இலாபமாகப் பெற அவன் எதிர்பார்த்தான். இதற்காக அவன் ஓர் அப்பிளை விற்க வேண்டிய விலையைக் காண்க.

7. ஒரு வியாபாரி 50 kg உப்பை 1 kg ரூ. 60 வீதம் வாங்கியதுடன் அவற்றில் 30 kg ஐ ஒரு கிலோகிராம் ரூ. 80 வீதம் விற்றான். எஞ்சிய உப்பு பழுதடையும் நிலையில் இருந்ததால் அதனைக் குறைந்த விலைக்கு விற்றதுடன் இறுதியில் உப்பு வியாபாரத்தினால் வியாபாரிக்கு இலாபமோ, நட்டமோ ஏற்படவில்லை. வியாபாரி எஞ்சிய உப்பை ஒரு கிலோகிராம் என்ன விலை வீதம் விற்றான் எனக் காண்க.

4.2 இலாப, நட்டச் சதவீதம்

ரமேசும் சுரேசும் இரண்டு வியாபாரிகள் ஆவர். ரமேஸ் ஒரு புடைவைக் கடை நடத்துவதுடன் அவன் ரூ. 800 வீதம் வாங்கிய ஒரு காற்சட்டையை ரூ. 900 வீதம் விற்கிறான். சுரேஸ் மின் உபகரணக் கடையை நடத்துவதுடன் அவன் ரூ. 2 500 இற்கு வாங்கிய மின் கேத்தலை ரூ. 2 600 வீதம் விற்கின்றான்.





இங்கு ரமேசும் சுரேசும் விற்கும் பொருள்கள் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுவதுடன் அவற்றின் கொள்விலை, விற்பனை விலை என்பவையும் சமனானவை அல்ல என்பது தெரிகின்றது. ஆயினும் இவ்விரு வியாபாரிகளும் மேற்குறித்த பொருள்களில் ஒன்று வீதம் விற்கும்போது பெறும் இலாபம் சமனானதாகும். அதாவது

ரமேஸ் ஒரு காற்சட்டையை விற்பதால் பெறும் இலாபம் = ரூ. 900 – 800
= ரூ. 100

சுரேஸ் ஒரு மின்கேத்தலை விற்பதால் பெறும் இலாபம் = ரூ. 2600 – 2500
= ரூ. 100

இதற்கேற்ப, இரண்டு வியாபாரிகளிடமும் 5000 ரூபாய் இருக்குமெனின், ''இலாபகரமான'' வியாபாரத்தில் ஈடுபடும் நபர் யார் என்பதை உங்களால் கூற முடியுமா?

ரமேசும் சுரேசும் மேற்குறித்த வியாபாரத்தின் மூலம் பெறும் இலாபப் பணம் சமனானது எனினும் குறித்த இலாபப் பணத்தைப் பெறுவதற்காக ஒவ்வொருவரும் செலவிடும் அளவுகள் சமனானவையல்ல என்பது தெளிவாகின்றது.

''இலாபகரமான '' வியாபாரத்தைத் தீர்மானிப்பதற்காக ஒவ்வொரு நபரும் செலவிட்ட பணத்தையும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். அதனைத் தீர்மானிப்பதற்காகப் பின்வருமாறான ஒரு கணித்தலைச் செய்யலாம்.

ரமேஸ் ரூ. 800 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் = ரூ. 100

ரமேஸ் பெறும் இலாபமானது அவனது செலவின் பின்னமாக $= \frac{100}{800}$

சுரேஸ் ரூ. 2 500 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் = ரூ. 100

சுரேஸ் பெறும் இலாபமானது அவனது செலவின் பின்னமாக $= \frac{100}{2500}$

செலவிட்ட பணத்தின் பின்னங்களாக எழுதிய இலாபங்களுக்காக $\frac{100}{800}$, $\frac{100}{2500}$ ஆகிய இரண்டு பின்னங்களையும் ஒப்பிடுவது இலகுவானது. இதற்குக் காரணம் இவற்றின் தொகுதி எண்கள் சமனாக இருப்பதாகும். தொகுதியெண்கள் சமனற்ற போதும் இலாபகரமான வியாபாரத்தை இம்முறையிலேயே காண்போம். அப்போது பின்னங்களை ஒப்பிடும்போது சிரமமாகலாம் என்பதால் இப்பிரசினங்களைச் சதவீதங்களாகக் காட்டுவதே பெரும்பாலும் இடம்பெறும். அச்சதவீதங்களை இவ்வாறு கணிப்போம்.

ரமேஸ் பெறும் இலாபமானது செலவின் பின்னமாக $= \frac{100}{800}$ என்பதால்

ரமேஸ் பெறும் இலாபச் சதவீதம் $= \frac{100}{800} \times 100\%$

$= 12.5\%$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப ரமேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் ரூ. 12.50 எனத் தெளிவாகின்றது.

சுரேஸ் பெறும் இலாபமானது செலவின் பின்னமாக $= \frac{100}{2500}$ என்பதால்

சுரேஸ் பெறும் இலாபச் சதவீதம் $= \frac{100}{2500} \times 100\%$

$= 4\%$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப சுரேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் ரூ. 4 ஆகும்.

12.5% > 4% என்பதால் இச்சந்தர்ப்பத்தில் ரமேசின் வியாபாரம் இலாபகரமானது எனத் தீர்மானிக்கப்படும்.

இச்சதவீதங்களின் கருத்தை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.

$\frac{100}{800} \times 100$ என்பது ரமேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்தால் கிடைக்கும் இலாபமாகும்.

$\frac{100}{2500} \times 100$ என்பது சுரேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்தால் கிடைக்கும் இலாபமாகும்.

இதற்கேற்க, ஒரு பொருளிற்கான செலவினம் ரூ. 100 ஆகும்போது அப்பொருளை விற்பதால் கிடைக்கும் இலாபம் (அல்லது நட்டம்) இலாபச் (அல்லது நட்டச்) சதவீதம் எனப்படும். எனவே யாதாயினுமொரு வியாபாரத்தில் கிடைக்கும் இலாபத்தை அல்லது நட்டத்தை செலவினத்தின் (கொள்விலையின்) பின்னமாகக் காட்டுவதுடன் அப்பின்னத்தை 100 % இனால் பெருக்குவதன் மூலம் இலாபத்தின் அல்லது நட்டத்தின் சதவீதத்தைக் கணிக்கலாம்.

$$\text{இலாபச் சதவீதம்} = \frac{\text{இலாபம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$$

$$\text{நட்டச் சதவீதம்} = \frac{\text{நட்டம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$$

உதாரணம் 1

ஒரு வியாபாரி ரூ. 25 வீதம் வாங்கிய பயிற்சிப் புத்தகங்களை ரூ. 30 வீதம் விற்றால், ஒரு பயிற்சிப் புத்தகத்தை விற்பதால் பெறப்படும் இலாபச் சதவீதத்தைக் காண்க.

இலாபம் = ரூ. 30 – 25
= ரூ. 5

$$\text{இலாபச் சதவீதம்} = \frac{5}{25} \times 100\%$$

$$= 20\%$$

உதாரணம் 2

ஆடை வியாபாரி ஒருவர் ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய காற்சட்டையை அதிலிருந்த ஒரு குறைபாடு காரணமாக ரூ. 450 இற்கு விற்றார் எனின், அவரடைந்த நட்டச் சதவீதத்தைக் காண்க.

நட்டம் = ரூ. 500 – 450
= ரூ. 50

$$\text{நட்டச் சதவீதம்} = \frac{50}{500} \times 100\%$$

$$= 10\%$$

உதாரணம் 3

ஒரு தச்சுத் தொழிலாளி ரூ. 4 000 ஐச் செலவு செய்து தயாரித்த ஒரு மேசையை ரூ. 5 600 இற்கு விற்றதுடன், ஒரு கொல்லன் ரூ. 250 ஐச் செலவு செய்து தயாரித்த ஒரு கத்தியை ரூ. 360 இற்கு விற்றான். இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களிலும் மிக இலாபகரமான வியாபாரத்தில் ஈடுபட்டவர் யார் என்பதைத் தீர்மானிக்க.



தச்சுத் தொழிலாளி பெற்ற இலாபம் முதலீட்டின் சதவீமாக $= \frac{1600}{4000} \times 100\% = 40\%$

கொல்லன் பெற்ற இலாபம் முதலீட்டின் சதவீதமாக $= \frac{110}{250} \times 100\% = 44\%$

எனவே இச்சந்தர்ப்பத்தில் மிக இலாபகரமான வியாபாரத்தில் ஈடுபட்டவர் கொல்லன் ஆவார்.

உதாரணம் 4

ஒரு வியாபாரி ரூ. 30 000 இற்கு வாங்கிய ஒரு மர அலுமாரியை 15% இலாபச் சதவீதம் பெறப்படும் வகையில் விற்றால், அலுமாரியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.



முறை I

இங்கு இலாபச் சதவீதம் 15% என்பதால் கருதப்படுவது ரூ. 100 இற்கு வாங்கிய பொருளிற்கு ரூ. 15 இலாபம் பெறப்படும் என்பதாகும். இன்னொரு விதமாகக் கூறுவதாயின், ரூ. 100 இற்கு வாங்கிய பொருள் 115 இற்கு விற்கப்படும் என்பதாகும். எனவே, ரூ. 30 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது

விற்கும் விலை $= \frac{115}{100} \times 30\ 000$

$=$ ரூ. 34 500

முறை II

மேலே, முறை I இல் அவதானித்தது போல ரூ. 100 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது பெறப்படும் இலாபம் ரூ. 15 என்பதால்

ரூ. 30 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது

பெறப்படும் இலாபம் $= \frac{15}{100} \times$ ரூ. 30 000

$=$ ரூ. 4 500

எனவே, பொருளின் விற்பனை விலை $=$ செலவினம் $+$ இலாபம்

$=$ ரூ. 30 000 + 4 500

$=$ ரூ. 34 500

உதாரணம் 5

ஒரு வியாபாரி ரூ. 1500 இற்கு வாங்கிய ஒரு சோடி பாதணியை 2% நட்டத்துடன் விற்றால், பாதணிச் சோடியின் விற்பனை விலை யாது ?

முறை I

2% நட்டம் என்பதால்
ரூ. 100 இங்கு வாங்கிய ஒரு பொருளின்
விற்பனை விலை = ரூ. 98



∴ ரூ. 1 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு பொருளின்

$$\text{விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } \frac{98}{100} \times 1\,500$$
$$= \text{ரூ. } 1\,470$$

முறை II

$$\text{ஏற்பட்ட நட்டம்} = \text{ரூ. } 1\,500 \times \frac{2}{100}$$
$$= \text{ரூ. } 30$$
$$\text{விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } 1\,500 - 30$$
$$= \text{ரூ. } 1\,470$$

உதாரணம் 6

ஒரு வியாபாரி ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை ரூ. 22 000 இற்கு விற்பதன் மூலம் 10% இலாபம் அடைந்தால் வியாபாரி தொலைக்காட்சிப் பெட்டியைக் கொள்வனவு செய்த விலையைக் காண்க.



முறை I

வாங்கிய விலை ரூ. 100 ஆகும்போது 10% இலாபம் பெற விற்கவேண்டிய விலை ரூ. 110 ஆகும்.

∴ ரூ. 110 இற்கு விற்ற பொருளின் கொள்விலை = ரூ. 100

$$\text{ரூ. } 22\,000 \text{ இற்கு விற்ற பொருளின் கொள்விலை} = \text{ரூ. } \frac{100}{110} \times 22\,000$$
$$= \text{ரூ. } 20\,000$$

முறை II

பொருளின் கொள்விலை ரூ. x எனின்,

$$\text{கிடைக்கும் இலாபம்} = \text{ரூ. } x \times \frac{10}{100}$$
$$= \text{ரூ. } \frac{x}{10}$$
$$\text{பொருளின் விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } x + \frac{x}{10}$$

$$\therefore\ x + \frac{x}{10} = 22\ 000$$
$$\frac{10x + x}{10} = 22\ 000$$
$$\frac{11x}{10} = 22\ 000$$
$$x = 22\ 000 \times \frac{10}{11}$$
$$x = 20\ 000$$

எனவே தொலைக்காட்சிப்பெட்டியின் கொள்விலை ரூ. 20 000 ஆகும்.

முறை III

பொருளின் கொள்விலை ரூ. x எனின்,

$$\text{விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } x \times \frac{110}{100}$$
$$x \times \frac{110}{100} = 22\,000$$
$$x = \frac{22\,000 \times 100}{110}$$
$$= 20000$$

எனவே தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின்

கொள்விலை = ரூ. 20 000

உதாரணம் 7

ஒரு விளையாட்டு உபகரணத்தை விற்கும்போது அதிலிருந்த ஓர் உற்பத்திக் கோளாறு காரணமாக ஒரு வியாபாரி அதனை ரூ. 6 800 இற்கு விற்க நேர்ந்ததால் 15% நட்டம் அடைந்தான். விளையாட்டு உபகரணத்தின் கொள்விலையைக் காண்க.

முறை I

கொள்விலை ரூ. 100 ஆகவுள்ள உபகரணத்தை 15% நட்டத்துடன் விற்கும் விலை ரூ. 85 ஆகும்.

ரூ. 85 இற்கு விற்கும் உபகரணத்தின் கொள்விலை = ரூ. 100

ரூ. 6 800 இற்கு விற்கும் உபகரணத்தின் கொள்விலை $= \text{ரூ. } \frac{100}{85} \times 6\ 800$

$= \text{ரூ. } 8\ 000$

முறை II

உபகரணத்தின் கொள்விலை ரூ. x ஆயின்

$$\text{ஏற்பட்ட நட்டம்} = \text{ரூ. } x \times \frac{15}{100}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{3x}{20}$$

உபகரணத்தின் விற்பனை விலை = ரூ. $x - \frac{3x}{20}$

அப்போது $x - \frac{3x}{20} = 6\,800$

$$\frac{20x - 3x}{20} = 6\,800$$

$$\frac{17x}{20} = 6\,800$$

$$x = 6\,800 \times \frac{20}{17}$$

$$x = 8\,000$$

பயிற்சி 4.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

கொள் விலை (ரூ)	விற்பனை விலை (ரூ)	இலாபமா/ நட்டமா	இலாபம்/ நட்டம் (ரூ)	இலாப/ நட்ட சதவீதம்
400	440	இலாபம்	40	10%
600	720	....	....	....
1500	1200	....	....	....
60	....	இலாபம்	....	60%
180	....	இலாபம்	....	30%
150	75	நட்டம்	....	....
200	....	நட்டம்	....	10%

2. ஓர் ஆடை வியாபாரி ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு காற்சட்டையை ரூ. 650 இற்கு விற்றால் வியாபாரி பெறும்
   (i) இலாபத்தைக் காண்க.
   (ii) இலாபச் சதவீதத்தைக் காண்க.

3. ரூ. 2 500 பெறுமதியுடைய ஒரு மின் அழுத்தியை ரூ. 2 300 இற்கு விற்பதால் அடையும்
   (i) நட்டத்தைக் காண்க.
   (ii) நட்டச் சதவீதத்தைக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி ஒரு பழம் ரூ. 18 வீதம் 100 மாம்பழங்களை வாங்குகின்றார். அவற்றில் சில பழுதடைந்ததால் 20 பழங்களை அகற்றிவிட்டு எஞ்சிய பழங்களை ஒன்று ரூ. 30 வீதம் விற்கிறான். இவ்வியாபாரத்தினால் அவன் அடைந்தது இலாபமா? நட்டமா? என்பதைத் தீர்மானித்து, அவனடைந்த
   (i) இலாபம்/ நட்டம்
   (ii) இலாப/ நட்டச் சதவீதம்
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஆடை உற்பத்தியாளர் ஒருவர் சிலவகை ஆடைகளைத் தைத்து முடிப்பதற்குச் செலவு செய்யும் பணமும் அவற்றின் விற்பனை விலையும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஆடை வகை	உற்பத்திச் செலவு (ரூ)	விற்பனை விலை (ரூ)
பிள்ளைகளின் மேற்சட்டை	300	350
பிள்ளைகளின் காற்சட்டை	400	450
பெண்களுக்கான சட்டை	500	575
மழை அங்கி	1000	1150

   (i) மேலே குறித்த ஒவ்வொரு வகைகளையும் விற்பதால் பெறப்படும் இலாபத்தையும் இலாபச் சதவீதத்தையும் வெவ்வேறாகக் காண்க.
   (ii) எவ்வகையான ஆடையை உற்பத்திசெய்வது அதிக இலாபகரமானது என்பதைக் காரணத்துடன் விளக்குக.

6. ஒரு புத்தக வியாபாரி ரூ. 300 பெறுமதியுடைய ஒரு நாவலை 25% இலாபம் கிடைக்கும் வகையில் விற்பாராயின் நாவலின் விற்பனை விலை யாது?

7. ரூ. 12 000 பெறுமதியுடைய ஒரு துவிச்சக்கரவண்டியை 10% நட்டத்துடன் விற்க வேண்டியிருந்ததாயின் துவிச்சக்கரவண்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

8. வீட்டுத் தளவாடங்களைத் தயாரிக்கும் ஒருவர் ஒரு கதிரையைத் தயாரிப்பதற்கான உற்பத்திச் செலவு ரூ. 1800 ஆகும். உற்பத்தியாளர் 20% இலாபச் சதவீதத்துடன் அக்கதிரையை ஒரு தளவாட வியாபாரிக்கு விற்பதுடன் வியாபாரி அதனை 20% இலாபத்துடன் ஒரு வாடிக்கையாளருக்கு விற்கிறார்.
   (i) வியாபாரி ஒரு கதிரையை வாங்குவதற்குச் செலவு செய்யும் பணம் யாது?
   (ii) ஒரு கதிரையை வாடிக்கையாளருக்கு விற்கும்போது கிடைக்கும் பணம் யாது?
   (iii) கூடிய இலாபம் பெறுபவர் உற்பத்தியாளரா, வியாபாரியா? என்பதைக் காரணத்துடன் விளக்குக.

9. ஒரு குளிர்ச்சாதனப் பெட்டியை ரூ. 33 000 இற்கு விற்பதால் ஒரு வியாபாரி 10% இலாபம் பெறுவானாயின் குளிர்ச்சாதனப்பெட்டியின் கொள்விலையைக் காண்க.

10. ஒரு மின் அடுப்பை ரூ. 28 500 இற்கு விற்பதால் ஒரு வியாபாரி 5% நட்டம் அடைவானாயின் மின் அடுப்பின் கொள்விலையைக் காண்க.

11. சில பொருள்களை விற்பதால் ஒரு வியாபாரி அடைந்த இலாப அல்லது நட்டச் சதவீதமும் விற்பனை விலையும் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அப்பொருள்களின் கொள்விலைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

பொருள்	விற்பனை விலை (ரூ)	இலாபச் சதவீதம்	நட்டச் சதவீதம்
சுவர்க்கடிகாரம்	3 240	8%	-
மின் அடுப்பு	7 500	25%	-
நிழற்படக் கருவி (camera)	12 048	-	4%

4.3 கழிவும் தரகும்

கழிவு



புத்தகங்களைக் கொள்வனவு செய்யும்போது 20% கழிவு வழங்கப்படும்.

பொருள் ஒன்றை விற்பனை செய்யும்போது அப்பொருளை விற்பனை செய்வதற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விலை அப்பொருளின் **குறித்த விலை** (marked price) எனப்படும். நுகர்வோர் பாதுகாப்புச் சட்டத்தின்படி விற்பனை செய்யப்படும் பொருளில் அவற்றின் குறித்த விலை குறிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

உருவில் ஒரு புத்தக விற்பனை நிலையத்தில் காட்சிப்படுத்தப்பட்டிருந்த ஒரு விளம்பரம் தரப்பட்டுள்ளது. இதில் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பது ஒரு புத்தகத்தை வாங்கும்போது 20% கழிவு உரித்தாகும் என்பதாகும். இதனால் கருதப்படுவது, விற்பதற்காகப் புத்தகத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விலையில் 20% கழிக்கப்பட்டு புத்தகம் விற்கப்படும் என்பதாகும். இவ்வாறு கழிக்கப்படும் பணம் **கழிவு** (Discount) எனப்படும். இக்கழிவானது பொருளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள விலையின் சதவீதமாகக் குறிக்கப்படுவதே பெரும்பாலும் இடம்பெறுகின்றது.

வாடிக்கையாளர்கள் பெரும்பாலும் கூடிய கழிவு வழங்கும் வியாபார நிலையங்களில் பொருள்களைவாங்கத்தூண்டப்படுவதால்அவ்வாறானநிலையங்களில்பொருள்களின் விற்பனையும் அதிகரிக்கிறது. இதனால் வியாபாரியின் இலாபமும் அதிகரிக்கிறது. பொருள்களை விற்கும்போது கழிவை வழங்குவதன் மூலம் வியாபாரிக்கும் நீண்ட கால அனுகூலங்கள் பல கிடைக்கின்றன.

உதாரணம் 1

கவிதா 20% கழிவை வழங்கும் ஒரு புத்தகக் கடையில் ரூ. 1500 பெறுமதியுள்ள புத்தகங்களை வாங்கினாள். கவிதா பெறும் கழிவைக் காண்க.

$$\text{கிடைக்கும் கழிவு} = \text{ரூ. } 1\,500 \times \frac{20}{100}$$
$$= \text{ரூ. } 300$$

உதாரணம் 2

ரூ. 9000 இற்கு உற்பத்திசெய்யப்படும் கையடக்கத் தொலைபேசி ஒன்றுக்கு இலாபம் ரூ. 3 000 பெறப்படும் வகையில் விலை குறிக்கப்படுகின்றது. அதனை விற்கும்போது குறித்த விலையில் 10% கழிவு வழங்கப்படுகின்றது எனின், இதனை விற்கும் விலையைக் காண்க.

முறை I

$$\text{உற்பத்திச் செலவு} = \text{ரூ. } 9\,000$$
$$\text{குறித்த விலை} = \text{ரூ. } 9000 + \text{ரூ. } 3\,000$$
$$= \text{ரூ. } 12\,000$$
$$\text{உரித்தாகும் கழிவு} = \text{ரூ. } 12\,000 \times \frac{10}{100}$$
$$= \text{ரூ. } 1\,200$$
$$\text{விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } 12\,000 - 1200$$
$$= \text{ரூ. } 10\,800$$

முறை II

ரூ. 100 விலையுள்ள ஒரு பொருளைக் கழிவுடன் விற்பனை செய்யும் விலை ரூ. 90 என்பதால்

$$\text{ரூ. 100 விலையுள்ள பொருளின் விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } 90$$

$$\text{எனவே, ரூ. 12 000 விலையுள்ள பொருளின் விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } \frac{90}{100} \times 12\,000$$
$$= \text{ரூ. } 10\,800$$

குறிப்பு

இங்கு முறை II இல் பிரசினம் தீர்ப்பது மிகச் சுருக்கமானது. எனவே இச்சுருக்கமான முறையில் பிரசினங்களைத் தீர்க்கப் பழகுதல் சிறந்தது.

உதாரணம் 3

ரூ. 2000 உடைய ஒரு கைக்கடிகாரத்தை உடன் பணத்திற்கு விற்கும்போது ரூ. 250 கழிக்கப்பட்டு விற்கப்பட்டதாயின் கிடைக்கும் கழிவுச் சதவீதத்தைக் காண்க.

கழிவுச் சதவீதம் $= \frac{250}{2000} \times 100\%$

$= 12.5\%$

உதாரணம் 4

8% கழிவுடன் ஒரு கதைப் புத்தகம் ரூ. 460 இற்கு விற்கப்படுமாயின் புத்தகத்தை விற்பதற்குக் குறித்த விலை யாது?

குறித்த விலை = ரூ. $460 \times \frac{100}{92}$

= ரூ. 500

தரகு





உருவில் காணிகள், வாகனங்கள், வீடுகள் ஆகியவற்றை விற்றுக் கொள்வதற்கான அல்லது வாங்குவதற்கான வசதிகளை வழங்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் விளம்பரம் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறான நிறுவனங்கள் மேற்குறித்தவாறான விற்பனைகளுக்காகக் கொள்வனவு செய்பவர்களைத் தேடித்தருவதுடன் விற்பனை நடைபெற்ற பின்னர் கொடுக்கல் வாங்கலின் பெறுமதியின் யாதாயினுமொரு சதவீதத்தை அவர்கள் அறவிட்டுக் கொள்வார்கள். இவ்வாறான நிறுவனங்கள் அல்லது தனி நபர்கள், ***''தரகர்கள்''*** (Brokers) என அழைக்கப்படுவர். தரகர்கள் மூலம் யாதாயினுமொரு விற்பனைக்காக வசதிகளை வழங்கும்போது விற்பனைப் பணத்தின் குறித்தவொரு சதவீதமாக அறவிடப்படும் பணம் ***தரகுப் பணம்*** (Commission) எனப்படும்.

உதாரணம் 5

5% தரகுச் சதவீதத்தை அறவிடும் ஒரு நிறுவனம் ரூ. 3000000 இற்கு மோட்டர் வாகனத்தை விற்பனை செய்து கொடுப்பதற்காக அறவிடப்படும் தரகுப் பணம் யாது?

அறவிடப்படும் தரகுப் பணம் = ரூ. $3\ 000\ 000 \times \frac{5}{100}$
= ரூ. 150 000

உதாரணம் 6

சொத்துகளை விற்பனைசெய்யும் ஒரு கம்பனி காணி ஒன்றை ரூ. 1200000 இற்கு விற்றுக் கொடுப்பதற்காக ரூ. 36000 ஐ அறவிடுகின்றது. அறவிடும் தரகுச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

தரகுச் சதவீதம் $= \frac{36\ 000}{1\ 200\ 000} \times 100\%$
$= 3\%$

பயிற்சி 4.3

1. ரூ. 25000 என விலை குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை விற்கும்போது 5% கழிவு வழங்கப்படுகின்றது.

(i) வழங்கப்பட்ட கழிவு யாது?
(ii) தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

2. 5% கழிவு வழங்கப்படும் ஒரு புடைவை விற்பனை நிலையத்தில் ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு காற்சட்டையும் ரூ. 1200 பெறுமதியுடைய ஒரு மேற்சட்டையும் வாங்கிய ரவி அவற்றுக்காக செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?

3. பண்டிகைக் காலத்தில் ஒரே வகையான பாதணிகளை விற்கும் இரண்டு விற்பனை நிலையங்களில் காட்சிபடுத்தப்பட்டிருந்த இரண்டு விளம்பரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

விற்பனை நிலையம் A	**விற்பனை நிலையம் B**
ஒவ்வொரு கொள்வனவின் போதும் 8% கழிவு வழங்கப்படும்	ரூ. 1000 ஐ விட அதிக தொகைக்குப் பொருள்களை வாங்கும்போது ரூ. 100 கழிவு வழங்கப்படும்.

(i) ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு சோடி பாதணிகளை விற்பனை நிலையம் A இல் வாங்கும்போது செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?
(ii) ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு சோடி பாதணிகளை விற்பனை நிலையம் B இல் வாங்கும்போது செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?

(iii) விற்பனை நிலையம் B இல் ஒரு சோடி பாதணிகளை வாங்கும்போது கிடைக்கும் கழிவுச் சதவீதம் யாது?
(iv) பாதணிச் சோடியை எவ்விற்பனை நிலையத்தில் வாங்குவது மிக அனுகூலமானது?

4. துவிச்சக்கர வண்டிகளை விற்பனை செய்யும் ஒருவர் ரூ. 8 000 இற்கு வாங்கிய ஒரு துவிச்சக்கர வண்டியைக் கொள்விலையில் 25% இலாபம் கிடைக்கும் வகையில் விற்பனைக்காக விலை குறித்துள்ளார். முழுத் தொகையையும் பணமாகவே செலுத்துவதாயின் (அதாவது வங்கி அட்டைகள் மூலம் செலுத்தாது காசு மூலம் செலுத்துவதாயின்) 10% கழிவு வழங்கப்படும்.

(i) துவிச்சக்கர வண்டியை விற்பதற்குக் குறிக்கப்பட்டுள்ள விலையைக் காண்க.
(ii) கழிவு வழங்கப்பட்ட பின்னர் துவிச்சக்கர வண்டியின் விலையைக் காண்க.
(iii) துவிச்சக்கர வண்டி விற்பனையாளர் 20% இலாபச் சதவீதம் பெறப்படும் வகையில் விலை குறித்தால் அப்போது துவிச்சக்கர வண்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

5. ஒரு வியாபாரி குறித்தவொரு பொருளை 10% இலாபம் பெறப்படும் வகையில் விலை குறித்தான். குறித்த விலையின் 10% கழிவை வழங்க எண்ணினான் இவ்வியாபாரத்தினால் அவனடைவது இலாபமா, நட்டமா என்பதை விவரிக்க.

6. குறித்தவொரு தரகர் கம்பனி ஒரு காணியை விற்றுக் கொடுப்பதற்காக 3 % தரகுப் பணத்தை அறவிடுகின்றது. ரூ. 5 000 000 பெறுமதியுடைய ஒரு காணியை விற்கும்போது
(i) செலுத்த வேண்டி ஏற்படும் தரகுப் பணம் யாது?
(ii) இக்கொடுக்கல் வாங்கல்களில் காணி உரிமையாளருக்குக் கிடைக்கும் பணம் யாது?

7. ஒரு தரகர் ரூ. 300 000 பெறுமதியுடைய மின் உற்பத்தி இயந்திரம் ஒன்றை விற்றுக் கொடுப்பதற்காகத் தரகுப் பணமாக ரூ. 25 000 ஐ அறவிட்டால், அதற்கென அறவிட்டுள்ள தரகுச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

8. ஒரு வாகனத்தை விற்கும்போது தரகருக்கு ரூ. 30 000 பணத்தைச் செலுத்திய பின்னர் வாகன உரிமையாளருக்குக் கிடைத்த பணம் ரூ. 570 000 ஆயின்,
(i) வாகனத்தின் விற்பனை விலை யாது?
(ii) அறவிடப்பட்டுள்ள தரகுச் சதவீதம் யாது?

9. வீடு ஒன்றை வாங்குவதற்கு ஒருவர் 3% தரகாக 270 000 ஐச் செலுத்துவாராயின் வீட்டின் விற்பனை விலை யாது?

பலவினப் பயிற்சி

1. கமலினியிடம் 10 பேர்ச் காணி உள்ளது. அவள் அதை பேர்ச் 300 000 ரூபாய் வீதம் விற்பதற்குத் தீர்மானித்தாள். அவள் அதை விற்பதற்கு உதவிய தரகருக்கு 3% தரகுப் பணமும் விற்பனையின்போது முழுத் தொகையையும் ஒரே தரத்தில் செலுத்துவதால் 1% கழிவும் வழங்குகின்றாள். காணியை விற்பதன் மூலம் கமலினிக்குக் கிடைத்த பணம் எவ்வளவு?

2. ரவி வாகனங்களை வாங்கி விற்கும் நிறுவனத்தை நடத்துகின்றான். அவன் 5 மில்லியன் ரூபாவைச் செலுத்தி வாகனம் ஒன்றை விற்கும் நோக்கில் வாங்குகின்றான். அதனை 6 மில்லியனுக்கு விற்பதற்கு விலை குறிக்கின்றான். ஆனால் விற்பனையின்போது குறித்த விலையில் 3% கழிவு வழங்குவதுடன் விற்பதற்கு உதவிய தரகருக்கு 2% தரகுப் பணம் செலுத்துகின்றான். இவ்வாகன விற்பனையால் அவனடைந்த இலாபம் எவ்வளவு?

பொழிப்பு

- இலாபம் = விற்ற விலை − செலவினம்

  நட்டம் = செலவினம் − விற்ற விலை

- $\text{இலாபச் சதவீதம்} = \dfrac{\text{இலாபம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$

  $\text{நட்டச் சதவீதம்} = \dfrac{\text{நட்டம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100$

- பொருள் ஒன்றுக்கு அதனை விற்க எதிர்பார்க்கப்படும் விலை குறித்த விலை எனவும் அதன் எதிர்பார்த்த விலையிலும் குறைந்த விலைக்கு விற்றால் கழிவு எனவும் கொள்ளப்படும்.

- விற்பனை ஒன்றின்போது ஒரு பொருளை விற்றுக் கொடுக்க உதவும் நபருக்கு அல்லது நிறுவனத்திற்கு வழங்கப்படும் பணம் தரகு எனப்படும்.

5 அட்சரகணிதக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

- திசைகொண்ட எண்களைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் எளிய அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கும்
- $(x \pm a)\,(x \pm b)$ வடிவிலான இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை விரித்து எழுதுவதற்கும்
- பரப்பளவின் மூலம் இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தின் விரிவை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

5.1 அட்சரகணிதக் கோவைகள்

தரம் 8 இல் அட்சரகணிதக் கோவைகளைப் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை நினைவு கூர்வதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $5\,(x + 2)$ **b.** $3\,(y + 1)$ **c.** $4\,(2m + 3)$
d. $3\,(x - 1)$ **e.** $4\,(3 - y)$ **f.** $2\,(3x - 2y)$
g. $(-2)\,(y + 3)$ **h.** $(-3)\,(2 + x)$ **i.** $(-5)\,(2a - 3b)$
j. $(-4)\,(m - 2)$ **k.** $(-1)\,(5 - y)$ **l.** $(-10)\,(-3b - 2c)$

2. அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $x\,(a + 2)$ **b.** $y\,(2b - 3)$ **c.** $a\,(2x + 3y)$
d. $2a\,(x + 5)$ **e.** $2b(y - 2)$ **f.** $3p\,(2x - y)$
g. $(-3q)\,(p + 8)$ **h.** $(-2x)\,(3 - 2y)$ **i.** $(-5m)\,(x - 2y)$

3. $x = 3, y = -2$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $x + y$ **b.** $x - y$ **c.** $3x - 2y$
d. $-2x + y$ **e.** $2(x + y)$ **f.** $3\,(2x - y)$

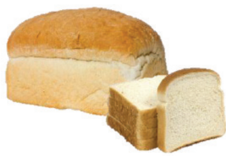
4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையையும் அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $3(x + y) + 2(x - y)$ **b.** $5(a + b) + 4(a + c)$
c. $4(2a + b) + 3(2a - b)$ **d.** $2(a - b) + (2a - b)$
e. $5(m + n) + 2(m - n)$ **f.** $3(m + n) - (m - n)$
g. $5(x - y) - 3(x + y)$ **h.** $2(3 - q) - 3(p - q)$
i. $-4(m + n) + 2(m + 2)$ **j.** $-4(a - b) - 2(a - b)$

5.2 பிரதியிடல்

ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையிலுள்ள தெரியாக் கணியங்களுக்கு நிறைவெண்களைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் அந்த அட்சரகணிதக் கோவைக்கு எண் பெறுமானமொன்றைப் பெறுவதற்கு நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளீர்கள். **திசைகொண்ட** எண்களைப் பிரதியிட்டு ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையின் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை இப்பகுதியில் பார்ப்போம்.

- ஒரு கணிதப் பாசறையில் 20 ஆண் பிள்ளைகளும் 16 பெண் பிள்ளைகளும் கலந்து கொண்டனர். அங்கு காலை உணவுக்காக ஓர் ஆண் பிள்ளைக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு x உம் ஒரு பெண் பிள்ளைக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு y உம் ஆகும். அவர்களுக்குத் தேவைப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவை ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையாக எழுதுவோம்.



20 ஆண்பிள்ளைகளுக்கும் வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு $= 20x$
16 பெண் பிள்ளைகளுக்கும் வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு $= 16y$
வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவு $= 20x + 16y$

ஓர் ஆண் பிள்ளைக்கு அரைவாசிப் பாணும் ஒரு பெண்பிள்ளைக்குக் கால்வாசிப் பாணும் வழங்கப்பட்டதாயின், வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவைக் காண்போம்.

அப்போது $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ ஆகும். பிள்ளைகளுக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவைக் காண்பதற்கு $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ ஆகிய பெறுமானங்களை $20x + 16y$ என்னும் கோவையில் பிரதியிட வேண்டும்.

இதற்கேற்ப வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவு $= 20 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{4}$
$= 10 + 4$
$= 14$

$\therefore$ பிள்ளைகளுக்கு மொத்தமாக 14 பாண்கள் வழங்கப்பட்டன.

உதாரணம் 1

$a = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2a + 3$

$$2a + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3$$
$$= 1 + 3$$
$$= 4$$

(ii) $6 - 4a$

$$6 - 4a = 6 - 4 \times \frac{1}{2}$$
$$= 6 - 2$$
$$= 4$$

(iii) $3a - 1$

$$3a - 1 = 3 \times \frac{1}{2} - 1$$
$$= \frac{3}{2} - 1$$
$$= \frac{3-2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

உதாரணம் 2

$b = \frac{-2}{3}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $3b + 5$

$$3b + 5$$
$$= 3 \times \frac{-2}{3} + 5$$
$$= (-2) + 5$$
$$= 3$$

(ii) $5 - 6b$

$$5 - 6b$$
$$= 5 - 6 \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$
$$= 5 + (-6) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$
$$= 5 + 4$$
$$= 9$$

(iii) $2b + \frac{1}{3}$

$$2b + \frac{1}{3}$$
$$= 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-4}{3} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-3}{3}$$
$$= -1$$

உதாரணம் 3

$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2x + 4y$

$$2x + 4y = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

(ii) $2x - 2y$

$$2x - 2y = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 1\frac{1}{2}$$

(iii) $4xy$

$$4xy = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= \frac{-1}{2}$$

(iv) $-2xy$

$$-2xy = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}$$

பயிற்சி 5.1

1. $x = \frac{1}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $4x$ (ii) $2x$ (iii) $3x$ (iv) $-8x$

2. $y = \frac{-1}{3}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $3y$ (ii) $2y$ (iii) $-6y$ (iv) $4y$

3. $a = -2,\ b = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $a + 2b$ (ii) $4b - a$ (iii) $3a + b$

4. $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{3}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $3x + 4y$ (ii) $3x - 2y$ (iii) $8y - 6x$

5. $p = -\frac{1}{2},\ q = -3$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $2p + q$ (ii) $4p - q$ (iii) $6pq - 2$

5.3 இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம்

முதலில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள், அட்சரகணித உறுப்புகள், அட்சரகணிதக் கோவைகள் என்பவற்றால் கருதப்படுவன யாவை என்பது பற்றி நினைவுகூர்வோம். x, y, z, a, b, c போன்ற ஆங்கில அட்சரங்களினால் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் தரப்படும்.

$2x,\ 5y,\ -2a,\ \frac{1}{3}x$ போன்று ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீடு இன்னுமோர் எண்ணினால் பெருக்கப்படும்போது அல்லது வகுக்கப்படும்போது அவை அட்சரகணித உறுப்புகள் எனப்படும். இவ்வாறே $xy,\ ay,\ bz,\ 2xy,\ -3zab$ போன்று ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீடு இன்னுமோர் அட்சரகணிதக் குறியீட்டினால் (அல்லது எண்ணினால்) பெருக்கப்பட்டுள்ளபோதும் அவை

அட்சரகணித உறுப்புகள் எனப்படும். மேலும் x, y, x, a போன்ற அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் உட்பட இவை அனைத்தும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் எனவும் வழங்கப்படும். (இவை ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஆகும்.)

இவற்றுக்கு மேலதிகமாக அட்சரகணிதக் குறியீடுகளின் அல்லது உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது வித்தியாசம் என்பனவும் அட்சரகணிதக் கோவை எனப்படும். உதாரணமாக $x + y$, $2a + xyz$, $4xy - yz$, $-2x + 3xy$ ஆகியன அட்சரகணிதக் கோவைகளாகும்.

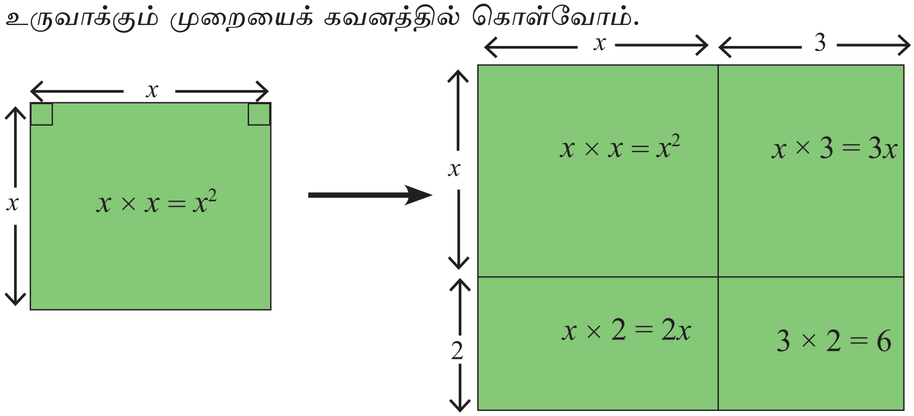
இவ்வாறே, ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீட்டுடன் அல்லது ஓர் உறுப்புடன் ஓர் எண் கூட்டப்பட்டுள்ளபோது அதுவும் அட்சரகணிதக் கோவை எனப்படும். உதாரணமாக $4 + x$, $1 - 3ab$ என்பனவும் அட்சரகணிதக் கோவைகளாகும்.

ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையில் உறுப்புகள் எவ்வெண்ணிக்கையிலும் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக $3 + ax - 2xyz + xy$ என்பது 4 உறுப்புகளையுடைய ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையாகும். இங்கு மூன்று அட்சரகணித உறுப்புகளும் ஓர் எண்ணும் உள்ளன. இரண்டு உறுப்புகளை மாத்திரம் கொண்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகள் **ஈருறுப்பு அட்சரகணிதக் கோவைகள்** (அல்லது எளிமையாக **ஈருறுப்புக் கோவைகள்**) எனப்படும்.

இப்போது இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைக் கருதுவோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள சதுர வடிவிலான பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் எனக் கொள்வோம். இப்பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தை 3 அலகுகளினாலும் மற்றைய பக்கத்தின் நீளத்தை 2 அலகுகளினாலும் அதிகரிக்கச்செய்து பெரிய செவ்வக வடிவப் பூப்பாத்தி ஒன்று அமைக்கப்படுகின்றது. இப்பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவுக்கான அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றை x இன் சார்பில் உருவாக்கும் முறையைக் கவனத்தில் கொள்வோம்.



பெரிய பூப்பாத்தியின் நீளம் $= x + 3$

பெரிய பூப்பாத்தியின் அகலம் $= x + 2$

உருவின்படி
பெரிய செவ்வகப் பூப்பாத்தியின்

$$\text{பரப்பளவு} = \text{நீளம்} \times \text{அகலம்} = (x + 3)(x + 2) \text{ ———— } (1)$$

என்றவாறு எழுதலாம்.

இந்த $(x + 3)(x + 2)$ என்பது இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம் என்பதை அவதானிக்க.

இப்பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவை வேறொரு முறையிலும் காணலாம். அது செவ்வகம் உருவாகியுள்ள நான்கு சிறிய செவ்வகப் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் ஆகும். அந்நான்கு பகுதிகள், முன்னர் இருந்த சதுரவடிவப் பகுதியும் உருவில் தரப்பட்டுள்ள மூன்று சிறிய செவ்வக வடிவப் பகுதிகளும் ஆகும். அதற்கேற்ப,

பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவு = நான்கு சிறிய பகுதிகளினதும் மொத்தப் பரப்பளவு

$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$= x^2 + 5x + 6 \text{ ———— } (2)$$

யாதாயினுமொரு பிரதேசத்தின் பரப்பளவு எவ்விதமாகக் கணிக்கப்படினும் அவை சமமாக இருக்க வேண்டும் என்பதால்,

(1), (2) என்பவற்றுக்கேற்ப

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

இனி, இத்தொடர்பை மேற்குறித்தவாறான உருவத்தைப் பயன்படுத்தாமல் எவ்வாறு பெறலாம் என ஆராய்வோம். இதற்காக,

முதலில் முதலாவதாக உள்ள அடைப்பினுள்ளே இருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பினாலும் இரண்டாவது அடைப்பினுள்ளே இருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குவோம்.

$$(x + 3)(x + 2) = (x + 3)(x + 2)$$

$$= x(x + 2) + 3(x + 2)$$

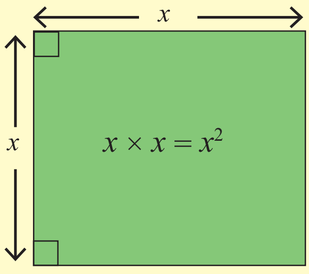
$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$= x^2 + 5x + 6$$

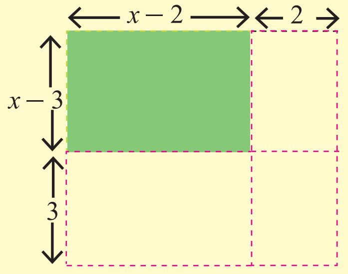
இவ்வாறான இன்னொரு செயற்பாட்டின் மீது நமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

செயற்பாடு 1

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் உடைய சதுரவடிவிலான ஒரு தகடு உரு I இல் தரப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து ஒரு பக்கத்தில் 2 அலகுகள் நீளமும் மற்றைய பக்கத்தில் 3 அலகுகள் நீளமும் உள்ள இரண்டு செவ்வகக் கீலங்கள் வெட்டி அகற்றப்பட்டுள்ள விதம் உரு II இல் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வுருக்களை அவதானித்து அவற்றுக்குக் கீழே உள்ள கீறிட்ட இடங்களைப் பூரணப்படுத்துக.



உரு I



உரு II

எஞ்சியுள்ள செவ்வக வடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு $= (x-2)\ (x-3)$————(1)

உரு II இற்கேற்ப,

எஞ்சியுள்ள செவ்வக வடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு = சதுரவடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு – மூன்று செவ்வக வடிவப் பகுதிகளினதும் பரப்பளவு

$= x^2 - 2(......) - ...(x-2) - 2 \times 3$ ————(2)

(1), (2) என்பவற்றிலிருந்து இரண்டு பரப்பளவுகளும் சமம் என்பதை அறியலாம்.

$\therefore (x-2)\ (x-3) = x^2 - 2(......) - ...(x-2) - 2 \times 3$

$= ....$

$= ....$

இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளும் முறையை மேலும் நன்கு விளங்கிக் கொள்வதற்காகச் சில உதாரணங்களைக் கவனத்திற் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1

$(x+5)\ (x+3)$

$(x+5)\ (x+3) = x\ (x+3) + 5\ (x+3)$

$= x^2 + 3x + 5x + 15$

$= x^2 + 8x + 15$

உதாரணம் 2

$(x+5)\ (x-3)$

$(x+5)\ (x-3) = x\ (x-3) + 5\ (x-3)$

$= x^2 - 3x + 5x - 15$

$= x^2 + 2x - 15$

உதாரணம் 3

$(x-5)\ (x+3)$

$(x-5)\ (x+3) = x\,(x+3) - 5\,(x+3)$
$= x^2 + 3x - 5x - 15$
$= x^2 - 2x - 15$

உதாரணம் 4

$(x-5)\ (x-3)$

$(x-5)\ (x-3) = x\,(x-3) - 5\,(x-3)$
$= x^2 - 3x - 5x + 15$
$= x^2 - 8x + 15$

உதாரணம் 5

$(x+8)\ (x-3) = x^2 + 5x - 24$ ஆகுமென $x = 5$ ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலம் காட்டுக.

இ. கை. ப = $(x+8)\ (x-3)$
$x = 5$ ஐப் பிரதியிடும்போது
இ. கை. ப $= (5+8)\ (5-3)$
$= 13 \times 2$
$= 26$

வ. கை. ப = $x^2 + 5x - 24$
$x = 5$ ஐப் பிரதியிடும்போது
வ. கை. ப $= 25 + 25 - 24$
$= 26$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

$\therefore (x+8)\ (x-3) = x^2 + 5x - 24$

பயிற்சி 5.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் ஈருறுப்புக் கோவையினதும் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.
   a. $(x+2)\ (x+4)$ **b.** $(x+1)\ (x+3)$ **c.** $(a+3)\ (a+2)$
   d. $(m+3)\ (m+5)$ **e.** $(p-4)\ (p-3)$ **f.** $(k-3)\ (k-3)$

2. மேற்குறித்த (1) இல் **a, b, e** ஆகிய பகுதிகளுக்கு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்திற்கான செவ்வகம் ஒன்றை வரைந்து அவற்றின் பரப்பளவைக் காண்பதன் மூலம் (1) இல் பெற்ற விடைகளை வாய்ப்புப் பார்க்க.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டினதும் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.
   a. $(x+2)\ (x-5)$ **b.** $(x+3)\ (x-7)$ **c.** $(m+6)\ (m-1)$
   d. $(x-2)\ (x+3)$ **e.** $(x-5)\ (x+5)$ **f.** $(m-1)\ (m+8)$
   g. $(x-3)\ (x-4)$ **h.** $(y-2)\ (y-5)$ **i.** $(m-8)\ (m-2)$
   j. $(x-3)\ (2-x)$ **k.** $(5-x)\ (x-4)$ **l.** $(2-x)\ (3-x)$

4. பகுதி A இலுள்ள கோவைகளைச் சுருக்கிப் பெறப்படும் கோவைகளைப் பகுதி B இல் தெரிந்தெடுத்து இணைக்க.

A	B
$(x+2)\ (x+1)$	$x^2 + 3x - 10$
$(x+3)\ (x-4)$	$x^2 - 25$
$(x+5)\ (x-2)$	$x^2 - 6x + 9$
$(x-3)\ (x-3)$	$x^2 + 3x + 2$
$(x-5)\ (x+5)$	$x^2 - x - 12$

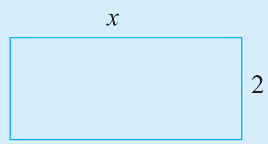
5. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(x + 5)(x + 6) = x^2 + 11x + 30$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
   (i) $x = 3$ (ii) $x = -2$

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
   (i) $x = 1$ (ii) $x = 4$ (iii) $x = 0$

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(2 - x)(4 - x) = x^2 - 6x + 8$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
   (i) $x = 2$ (ii) $x = 3$ (iii) $x = -2$

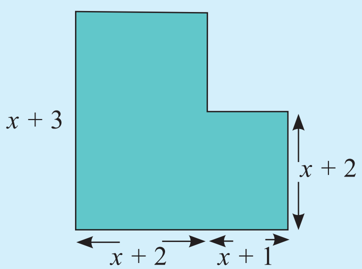
8. ஓர் அலங்காரத்துக்காக வெட்டியெடுக்கப்பட்ட செவ்வக வடிவிலான ஒரு தாளின் நீளம் 15 cm உம் அகலம் 8 cm உம் ஆகும். நீளப் பக்கத்திலிருந்தும் அகலப் பக்கத்திலிருந்தும் x சென்ரிமீற்றர் நீளமுடைய இரண்டு கீலங்கள் வெட்டி அகற்றப்படுகின்றன. எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையை உருவின்மூலம் பெறுக. ($x < 8$ எனக் கொள்க.)

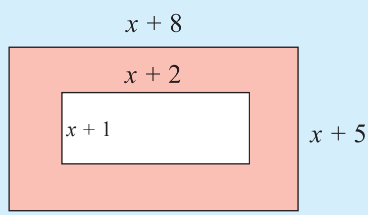
9. x மீற்றர் நீளமும் 2 மீற்றர் அகலமும் உடைய ஒரு பூப்பாத்தி உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. இப்பூப்பாத்தியின் நீளப் பக்கத்தில் 2 மீற்றர் குறைக்கப்பட்டு அகலப் பக்கத்தில் x மீற்றர் அதிகரிக்கப்பட்டது. புதிதாக அமைக்கப்பட்ட பூப்பாத்தியான செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்கான கோவையை x இன் சார்பில் உருவைப் பயன்படுத்திக் காண்க. ($x > 2$எனக் கொள்க.)



பலவினப் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் உள்ள நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதிகளின் பரப்பளவிற்குப் பொருத்தமான கோவைகளை எழுதிச் சுருக்குக.





2. $(x + a)(x + 4) = x^2 + bx + 12$ எனின், a, b என்பவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பொழிப்பு

- திசைகொண்ட எண்களை அட்சரகணிதக் கோவைகளில் தெரியாக் கணியங்களுக்குப் பிரதியிட்டு அவற்றின் பெறுமானங்களைக் காணலாம்.
- இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் விரியைக் காண்பதற்கு அதன் முதற் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பினாலும் இரண்டாவது கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பெருக்கிச் சுருக்க வேண்டும்.
- ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை உரிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளின் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

6 அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பொதுக் காரணி ஈருறுப்பாக அமையும் நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவையொன்றின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்
- $x^2 + bx + c$ வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவதற்கும்
- இரு நிறைவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

சென்ற 5 ஆம் பாடத்தில் அட்சரகணித உறுப்புகள் பலவற்றுக்குரிய விளக்கம் அளிக்கப்பட்டது. இப்பாடத்தில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் பலவற்றின் மேலதிக விளக்கத்தைப் பெறுவோம். முதலில் அட்சரகணித உறுப்பு (அல்லது கோவை ஒன்றின்) காரணி என்பதன் பொருளை அறிவோம்.

$2xy$ என்னும் அட்சரகணித உறுப்பை 2, x, y என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். எனவே 2, x, y என்பவை அதன் காரணிகளாக அமையும். அத்துடன் $2x$, $2y$, $2xy$, xy போன்றவையும் இதன் காரணிகளாகும்.

$2x + 2y$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும். அதாவது அது இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இங்கே $2x$ இன் காரணிகள் 2 உம் x உம் ஆகின்றன. அவ்வாறே 2, y என்பன $2y$ இன் காரணிகளாகின்றன. இதற்கேற்ப 2 ஆனது $2x$, $2y$ என்னும் இரு உறுப்புகளினதும் பொதுக் காரணியாகின்றது. இப்பொதுக் காரணியைக் கருதும்போது இந்த ஈறுருப்புக் கோவையை $2(x + y)$ எனவும் எழுதலாம் எனத் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளோம்.

அதாவது $2x + 2y = 2(x + y)$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறு எழுதுவதன் சிறப்பு என்னவெனில், $2x$ இனதும் $2y$ இனதும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையானது 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளமையாகும். அப்போது 2 உம் $x + y$ உம் $2x + 2y$ இன் காரணிகளாகின்றன.

இதை வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் $2x + 2y$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையை 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

இங்கே $2x + 2y$ என்னும் கோவையின் ஒரு காரணியாக 2 என்னும் எண் அமைந்ததுடன் $x + y$ என்பது மற்றைய காரணியாகவும் அமைந்தது. சில சந்தர்ப்பங்களில் அட்சரகணித உறுப்புகள் அல்லது அட்சரகணிதக் கோவை காரணிகளாக அமையலாம். $xy + 5xz$ என்னும் கோவையைக் கருதும்போது இதனை $x(y + 5z)$ என எழுதக்கூடியதாக இருப்பதால் x உம் $y + 5z$ உம் இக்கோவையின் காரணிகளாக அமைகின்றன.

முன்னர் கற்ற விடயங்களிற்கேற்ப $x(y + 5z)$ என மடங்காக எழுதப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையின் அடைப்புக்குறியை நீக்கிச் சுருக்கும்போது $xy + 5xz$ என்னும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்படும் கோவை பெறப்படும். இப்பாடத்தின் மூலம் நாம் முன்னைய பாடத்தில் கற்ற செயற்பாட்டைப் பின்னோக்கி எவ்வாறு செய்யலாம் எனப் பார்ப்போம். அதாவது ஓர் அட்சரகணிதக் கோவை காரணிகளின் மடங்காக எவ்வாறு எழுதப்படும் என்பதாகும்.

தரம் 8 இல் கற்றவாறு பின்வரும் கூற்றுகளின் காரணிகளின் மடங்காக எழுதப்பட்டிருக்கும் முறையை நோக்குவோம்.

- $3x + 12 = 3\ (x + 4)$
- $6a + 12b - 18 = 6\ (a + 2b - 3)$
- $-2x - 6y = -2\ (x + 3y)$
- $3x - 6xy = 3x\ (1 - 2y)$

மேலே இரண்டாவது உதாரணத்தில் உள்ள $6a + 12b - 18$ இல் பொதுக் காரணி 6 ஆக உள்ளது. அது 6, 12, 18 ஆகிய எண்களின் பொதுக் காரணிகளுட் பெரியதாகும். பொதுக் காரணிகளுட் பெரிய எண்ணே (+, – குறியைக் கருதாமல்) எப்போதும் பொதுக் காரணியாக அமையும். அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றின் காரணிகளைக் காணும்போது எண்களின் காரணிகளைக் காணவேண்டியதில்லை. உதாரணமாக $6x + 6y$ என்பதை $6(x + y)$ என்றே எழுத வேண்டும். அதனை $2 \times 3\ (x + y)$ என்று எழுத வேண்டியதில்லை. இவ்விடயங்களை மேலும் உறுதிப்படுத்திக்கொள்ளப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

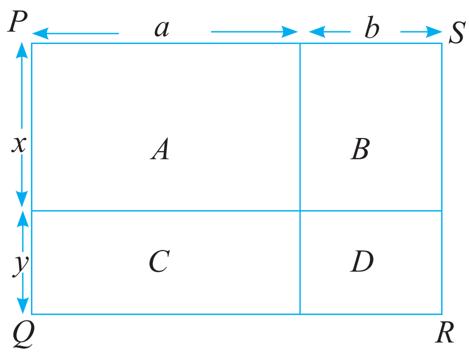
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் அட்சரகணிதக் கோவையையும் காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

a. $8x + 12y$	**b.** $9a + 18y$	**c.** $3m + 6$
d. $20a - 30b$	**e.** $4p - 20q$	**f.** $12 - 4k$
g. $3a + 15b - 12$	**h.** $12a - 8b + 4$	**i.** $9 - 3b - 6c$
j. $-12x + 4y$	**k.** $-8a - 4b$	**l.** $-6 + 3m$
m. $ab + ac$	**n.** $p - pq$	**o.** $ab + ac - ad$
p. $3x + 6xy$	**q.** $6ab - 9bc$	**r.** $4ap + 4bp - 4p$
s. $x^3 + 2x$	**t.** $3m - 2nm^2$	**u.** $6s \quad - 12\,s^2t$

6.1 நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

A, B, C, D என்னும் நான்கு சிறிய செவ்வகங்களை உள்ளடக்கிய $PQRS$ என்னும் செவ்வகம் உருவில் காணப்படுகின்றது.



ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவையும் x, y, a, b என்னும் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் மூலம் காண்போம்.

பகுதி A யின் பரப்பளவு $= a \times x = ax$

பகுதி B யின் பரப்பளவு $= b \times x = bx$

பகுதி C யின் பரப்பளவு $= a \times y = ay$

பகுதி D யின் பரப்பளவு $= b \times y = by$

அடுத்து நாம் பெரிய செவ்வகமாகிய $PQRS$ இன் பரப்பளவை எவ்வாறு காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

பெரிய செவ்வகத்தின் நீளம் $= a + b$

பெரிய செவ்வகத்தின் அகலம் $= x + y$

எனவே பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $= (a + b)\ (x + y)$

4 சிறிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவு = பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்பதால்

$$ax + ay + bx + by = (a + b)\ (x + y) \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கு முன்னர் கற்ற ஈருறுப்புகளின் பெருக்கத்தை விரிவுபடுத்துவதால் $(a + b)\ (x + y)$ என்னும் பெருக்கத்தின் உண்மைத் தன்மையை அறியலாம். இதனை இவ்வாறு விரிவுபடுத்துவோம்.

$$\begin{aligned}(a + b)\ (x + y) &= a\ (x + y) + b\ (x + y)\\ &= ax + ay + bx + by\end{aligned}$$

அதாவது இக்கூற்றின் உண்மைத் தன்மை வாய்ப்புப் பார்க்கப்படுகின்றது (அதாவது செம்மை உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றது).

இப்பாடத்தில் நாம் எதிர்பார்ப்பது $ax + ay + bx + by$ என்னும் வடிவில் கோவை தரப்படும்போது அதனை $(a + b)\ (x + y)$ என்னும் வடிவில் காரணிகளின் பெருக்கமாக எவ்வாறு எழுதுவது என்பதாகும். ax, ay, bx, by ஆகிய நான்கு காரணிகளுக்கும் பொதுவான காரணி இல்லை என்பதை முதலில் உறுதிப்படுத்த வேண்டும். எனவே பொதுக் காரணியை உடனே வேறாக்க முடியாது. இருந்தபோதும் இவ்விரண்டு உறுப்புகளாக வேறாக்கி எழுதுவதன் மூலம் பின்வரும் விதத்தில் பொதுக் காரணிகளைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned}ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by)\\ &= x\ (a + b) + y\ (a + b)\end{aligned}$$

இப்போது இறுதியாகப் பெறப்பட்ட உறுப்புகள் $x\ (a + b)$ உம் $y\ (a + b)$ உம் இரு கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையாக அமைகின்றன. இங்கு $x\ (a + b)$, $y\ (a + b)$ ஆகிய இரு கோவைகளுக்கும் $(a + b)$ பொதுக் காரணியாக அமைந்துள்ளது என்பதை நோக்குக. ஆகையால் இப்பொதுக் காரணியை வேறாக்கி, $(a + b)\ (x + y)$ என இதனை எழுதலாம் அதாவது $ax + bx + ay + by = x\ (a + b) + y\ (a + b)$

$$= (a + b)\ (x + y)$$

என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

$3x + 6y + kx + 2ky$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$3x + 6y + kx + 2ky = 3(x + 2y) + k(x + 2y)$$
$$= (x + 2y)(3 + k)$$

உதாரணம் 2

$a^2 - 3a + ab - 3b$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$a^2 - 3a + ab - 3b = a(a - 3) + b(a - 3)$$
$$= (a - 3)(a + b)$$

உதாரணம் 3

$x^2 + xy - x - y$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$x^2 + xy - x - y = x^2 + xy - 1(x + y)$$
$$= x(x + y) - 1(x + y)$$
$$= (x + y)(x - 1)$$

பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

a. $ax + ay + 3x + 3y$
b. $ax - 8a + 3x - 24$
c. $mp - mq - np + nq$
d. $ak + al - bk - bl$
e. $x^2 + 4x - 3x - 12$
f. $y^2 - 7y - 2y + 14$
g. $a^2 - 8a + 2a - 16$
h. $b^2 + 5b - 2b - 10$
i. $5 + 5x - y - xy$
j. $ax - a - x + 1$

6.2 $x^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்

$(x + 3)$, $(x + 4)$ என்னும் ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் மடங்கைப் பெற்ற விதத்தை மீண்டும் நோக்குவோம்.

$$(x + 3)(x + 4) = x(x + 4) + 3(x + 4)$$

$$= x^2 + 4x + 3x + 12$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

$(x + 3)$, $(x + 4)$ ஆகிய இரண்டு கோவைகளினதும் மடங்கு $x^2 + 7x + 12$ எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. எனவே $(x + 3)$ உம் $(x + 4)$ உம் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையின் இரண்டு காரணிகளாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்னும் வடிவில் அமைந்த இருபடி உறுப்பைக் (x^2 ஐக்) கொண்ட இவ்வாறான கோவை மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் கருதும் மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக்கோவையொன்றை $x^2 + bx + c$ எனப் பொதுவாகக் குறிக்கலாம். இங்கே b, c என்பன எண்களாகின்றன. உதாரணமாக $x^2 + 7x + 12$ என்பது $b = 7$, $c = 12$ ஆக அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவை ஒன்றாகும். இங்கே bx நடு உறுப்பும் c மாறா உறுப்புமாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்பதை $(x + 3)(x + 4)$ என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். இருந்துபோதும் இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாத மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளும் உள்ளன. உதாரணமாக $x^2 + 3x + 4$ என்னும் மூவுறுப்புக் கோவையை இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாது.

காரணிப்படுத்தக்கூடிய மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையைக் காரணிகளாக்கும் முறையை இனிப் பார்ப்போம்.

இவ்வாறான இருபடிக் கோவை ஒன்றை ஈருறுப்புகளைக் கொண்ட இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதும் விதத்தை அறிவதற்கு ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் பெருக்கத்தைப் பெற்ற படிமுறைகளைப் பின்னிருந்து நோக்கி ஆராய்வோம்.

- $x^2 + 7x + 12$ என அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவையின் நடு உறுப்பான $7x$ ஐ $3x + 4x$ என இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம். $7x$ என்பதை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகப் பலமுறைகளில் காண்பிக்கலாம். அதாவது $7x$ என்பதை $7x = 5x + 2x$, $7x = 8x + (-x)$ என்பன சில உதாரணங்களாகும். இருந்தபோதும் $3x$, $4x$ என்பவற்றின் சிறப்பைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.
- $3x$, $4x$ என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கம் = $3x \times 4x = 12x^2$ ஆகும்.
- அத்துடன் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் இருபடிக் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கமும் $x^2 \times 12 = 12\,x^2$ ஆகும்.
- மேலும் மேலே பெற்ற விடயத்தை அவதானித்து மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணலாம்.

நடு உறுப்பு இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதப்பட வேண்டும். அவ்வாறு எழுதப்பட்ட இரு உறுப்புகளின் பெருக்கம் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்திற்கு ஒத்திருக்க வேண்டும்.

$x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காணும் முறையை உதாரணமாகக் கொள்வோம். இதில் உள்ள நடு உறுப்பு $6x$ ஆகும். இதனை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதவேண்டும். அத்துடன் அவற்றின் பெருக்கம் $x^2 \times 8 = 8x^2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

இதற்கேற்ப பெருக்கம் $8x^2$ இற்கும் கூட்டுத்தொகை $6x$ இற்கும் ஒத்துள்ள காரணிச் சோடியைக் காண்போம். பெருக்கம் $8x^2$ ஆக எழுதக்கூடிய சில முறைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகின்றது. $8x^2$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

உறுப்புச் சோடிகள்	பெருக்கம்	கூட்டுத்தொகை
x, $8x$	$x \times 8x = 8x^2$	$x + 8x = 9x$
$2x$, $4x$	$2x \times 4x = 8x^2$	$2x + 4x = 6x$

நடு உறுப்பாகிய $6x$ ஐப் பெற உகந்த உறுப்புகளின் சோடி $2x + 4x$ ஆகும். இதனைக் கொண்டு $x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x(x+2) + 4(x+2) \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$\therefore\ x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகள் $x + 2$ உம் $x + 4$ உம் ஆகும்.

மேலுள்ள $x^2 + 6x + 8$ ஐ அதன் நடு உறுப்பு $2x + 4x$ இற்குப் பதிலாக $4x + 2x$ என எழுதிக் காரணிபடுத்தினால் இறுதிக் காரணி மாறுமா எனக் கவனிப்போம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 4x + 2x + 8 \\ &= x(x+4) + 2(x+4) \\ &= (x+4)(x+2) \end{aligned}$$

அப்போதுங்கூட அதே காரணிச் சோடிகளே பெறப்பட்டுள்ளன. எனவே நடு உறுப்புகளைத் தெரிவுசெய்து உறுப்புச் சோடியை எழுதும் முறை இறுதிக் காரணியின் மீது செல்வாக்குச் செலுத்தாது.

உதாரணம் 1

$x^2 + 5x + 6$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 6 = 6x^2$

நடு உறுப்பு $= 5x$

$2x + 3x = 5x$ என்பதாலும் $(2x)(3x) = 6x^2$ என்பதாலும் பின்வருமாறு காரணிகளைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x(x+2) + 3(x+2) \\ &= (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

உதாரணம் 2

$x^2 - 8x + 12$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 12 = 12x^2$ உம் நடு உறுப்பு $(-8x)$ உம் ஆகும். இங்கே மறையுடனான உறுப்பு உள்ளது. $12x^2$ பெருக்கமாக அமையும் x ஐக் கொண்ட இரு காரணிச் சோடிகள் சிலவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

x,	$12x$
$2x$,	$6x$
$3x$,	$4x$
$-2x$,	$-6x$
$-3x$,	$-4x$
$-x$,	$-12x$

மேலே உள்ளவாறு $-8x = (-2x) + (-6x)$ எனின், $(-2x)\ (-6x) = 12x^2$ ஆகும்.

ஆகையால், $x^2 - 8x + 12 = x^2 - 2x - 6x + 12$

$$= x(x-2) - 6(x-2)$$

$$= (x-2)(x-6)$$

உதாரணம் 3

$y^2 + 2y - 15$ என்னும் கோவையின் காரணிகளைக் காண்க.
முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= y^2 \times -15 = -15y^2$ ஆகும்.
நடு உறுப்பு $2y$ ஆகும்.

$(-15y^2) = (5y)\ (-3y)$ என எழுதலாம். அத்துடன் $(5y) + (-3y) = 2y$ என்பதன் மூலம் நடு உறுப்பும் கிடைக்கின்றது.

ஆகையால் $y^2 + 2y - 15 = y^2 - 3y + 5y - 15$

$$= y(y-3) + 5(y-3)$$

$$= (y-3)(y+5)$$

உதாரணம் 4

$a^2 - a - 20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= a^2 \times (-20) = -20a^2$ ஆகும்.

நடு உறுப்பு $(-a)$ ஆகும்.

$-20a^2 = (-5a)\ (4a)$ ஆகவும் $(-5a) + (4a) = -a$ ஆகவும் இருப்பதனால் $(-a)$ இற்குப் பின்வரும் முறையைக் கொண்டு காரணிகளைக் காணலாம்.

$a^2 - a - 20 = a^2 + 4a - 5a - 20$

$$= a(a+4) - 5(a+4)$$

$$= (a+4)(a-5)$$

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு இருபடிக் கோவையினதும் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2 + 9x + 18$	**b.** $y^2 + 11y + 30$	**c.** $a^2 + 10a + 24$
d. $b^2 - 8b + 15$	**e.** $x^2 - 5x + 6$	**f.** $m^2 - 12m + 20$
g. $a^2 + a - 12$	**h.** $p^2 + 5p - 24$	**i.** $p^2 + 6p - 16$
j. $x^2 - x - 12$	**k.** $a^2 - 3a - 40$	**l.** $r^2 - 3r - 10$
m. $y^2 + 6y + 9$	**n.** $k^2 - 10k + 25$	**o.** $4 + 4x + x^2$
p. $36 + 15x + x^2$	**q.** $30 - 11a + a^2$	**r.** $54 - 15y + y^2$

குறிப்பு

மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும்போது நடு உறுப்பைப் பொருத்தமான இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதுவது மிக முக்கியமானதாகும். அத்துடன் இவை இரண்டினதும் பெருக்கம் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்துக்குச் சமமாக இருப்பதுவும் மிக முக்கியமாகும்.
இதில் பயிற்சி பெற்றதும் மனக்கணிதத்தின் மூலமாகக் காரணிகளைக் காணலாம். மேலே 4 ஆம் உதாரணத்தில் தரப்பட்ட $-5a\ -20$ இன் பொதுக் காரணியாக -5 ஐ வேறுபடுத்திய பின்னர் $-5\ (a + 4)$ என்னும் கோவை பெறப்படும். அதை $-5\ (a - 4)$ எனச் சிலர் தவறாக எழுதுவர்.

6.3 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எழுதப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகள்

$(x - y)$ இனதும் $(x + y)$ இனதும் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(x - y)\ (x + y) = x\ (x + y) - y\ (x + y)$$
$$= x^2 + xy - xy - y^2$$
$$= x^2 - y^2$$

இதற்கேற்ப $(x + y)\ (x - y)$ என்பது $x^2 - y^2$ என்னும் கோவைக்குச் சமனாவதுடன் கோவை $x^2 - y^2$ ஆனது இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எனப்படும்.

$(x + y)\ (x - y) = x^2 - y^2$ என்பதிலிருந்து $x^2 - y^2$ என்னும் கோவையின் காரணிகள் $x + y$ உம் $x - y$ உம் ஆகும் என்பது தெளிவாகின்றது.

$x^2 - y^2$ என்பது x இன் இருபடிக் கோவை எனக் கருதி அதன் காரணிகளைக் காணலாமா எனப் பார்ப்போம். அதன் நடு உறுப்பு 0 எனக் கருதினால் இக்கோவையை $x^2 + 0 - y^2$ என எழுதலாம். இனி இதன் காரணிகளைக் காண்போம். கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times (-y^2) = -x^2y^2$ ஆகும். நடு உறுப்பு 0 என்பதால்

$$-x^2y^2 = (-xy) \times (xy) \longrightarrow -xy + xy = 0$$

அப்போது $x^2 + 0 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2$

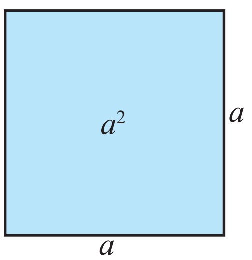
$$= x\,(x - y) + y\,(x - y)$$

$$= (x - y)\,(x + y)$$

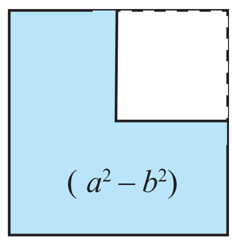
இவ்வாறு $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$ என்பது பெறப்படும்.

உருவைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்போம்

இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்பதற்கு நாம் பக்க நீளம் a அலகுகள் உள்ள சதுரம் ஒன்றைக் கருதுவோம் (உரு (i)). அதிலிருந்து பக்க நீளம் b அலகுகள் ஆகவுள்ள சதுரம் ஒன்றை உரு (ii) இல் காட்டியதுபோன்று நீக்குவோம். தற்போது எமக்குக் கிடைக்கும் உருவின் பரப்பளவு $(a^2 - b^2)$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

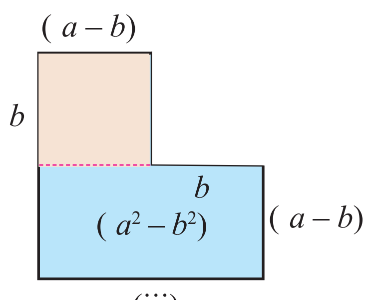


உரு (i)

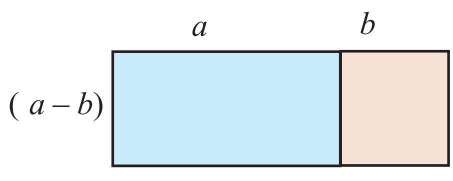


உரு (ii)

அடுத்து நாம் உரு (ii) இல் பெற்ற உருவை உரு (iii) காட்டியதுபோன்று இரண்டு செவ்வகங்களாகப் பிரித்து உரு iv இல் உள்ளது போன்று இணைப்போம்.



உரு (iii)



உரு (iv)

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் நீளம் $(a + b)$ அலகுகளும் அகலம் $(a - b)$ அலகுகளும் ஆகும்.

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம்

$= (a + b)(a - b)$ ஆகும்.

ஆகவே $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ஆகும்.

இங்கே ஓர் உருவின் பரப்பளவு இரண்டு விதமாகப் பெறப்பட்டுள்ளது. ஆகவே அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

இனி இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட கோவைகள் சிலவற்றின் காரணிகளைக் காணும் உதாரணங்களை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

$x^2 - 25$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2$

$= (x - 5)(x + 5)$

உதாரணம் 2

$9 - y^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$9 - y^2 = 3^2 - y^2$

$= (3 - y)(3 + y)$

உதாரணம் 3

$4a^2 - 49$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$4a^2 - 49 = 2^2a^2 - 7^2$

$= (2a - 7)(2a + 7)$

உதாரணம் 4

$1 - 4b^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$1 - 4b^2 = 1^2 - 2^2b^2$

$= 1^2 - (2b)^2$

$= (1 - 2b)(1 + 2b)$

உதாரணம் 5

$2x^2 - 72$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$2x^2 - 72 = 2(x^2 - 36)$

$= 2(x^2 - 6^2)$

$= 2(x - 6)(x + 6)$

உதாரணம் 6

$33^2 - 17^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$33^2 - 17^2 = (33 + 17)(33 - 17)$

$= 50 \times 16$

$= 800$

உதாரணம் 7

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$

உதாரணம் 8

$1 - \frac{9x^2}{16}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$1 - \frac{9x^2}{16} = 1^2 - \left(\frac{3x}{4}\right)^2$

$= \left(1 - \frac{3x}{4}\right)\left(1 + \frac{3x}{4}\right)$

பயிற்சி 6.3

1. பின்வரும் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2 - 100$	**b.** $m^2 - 36$	**c.** $p^2 - 81$
d. $4 - b^2$	**e.** $16 - a^2$	**f.** $64 - y^2$
g. $x^2 - 4y^2$	**h.** $9a^2 - 16b^2$	**i.** $100x^2 - 1$
j. $25m^2 - n^2$	**k.** $49 - 81p^2$	**l.** $25a^2b^2 - 9c^2$

பலவினப் பயிற்சி

1. பொருத்தமானவாறு உறுப்புகளை மாற்றி எழுதிக் காரணிகளைக் காண்க.

   (i) $ax + by - ay - bx$ (ii) $pq - 6 + 3q + 2q$

   (iii) $x - 12 + x^2$ (iv) $4 - k^2 - 3k$

2. காரணிகளைக் காண்க.

   (i) $8x^2 - 50$ (ii) $3x^2 - 243$

   (iii) $a^3 b^3 - ab$ (iv) $3 - 12q^2$

3. பெறுமானம் காண்க.

   (i) $23^2 - 3^2$ (ii) $45^2 - 5^2$ (iii) $102^2 - 2^2$

4. நிரல் A யில் உள்ள கோவைகளுக்குப் பொருத்தமான கோவையை நிரல் B இல் இருந்து தெரிவுசெய்து தொடர்புபடுத்துக.

A	B
$x^2 - x - 6$	$\left(\frac{x}{5} - 1\right)\left(\frac{x}{5} + 1\right)$
$x^2 + 5x - 3x - 15$	$2x(x - 2)(x + 2)$
$2x^3 - 8x$	$(x - 3)(x + 5)$
$4x^2 - 9m^2$	$(x - 3)(x + 2)$
$\frac{x^2}{25} - 1$	$(2x - 3m)(2x + 3m)$

7 வெளிப்படையுண்மைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- கணிதத்தில் வரும் 5 வெளிப்படையுண்மைகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- இந்த 5 வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் தொடர்புகளை உருவாக்கு வதற்கும் கேத்திரகணிதக் கணித்தலுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வெளிப்படையுண்மைகள்

நிறுவலின்றித் திட்டமாக உண்மை எனத் தெரியும் கூற்றுகள் வெளிப்படையுண்மைகள் எனப்படும். கணிதத்தில் தர்க்கரீதியாக விடயங்களை விவரிப்பதற்கும் தொடர்புகளை உருவாக்குவதற்கும் முடிவுகளை எடுப்பதற்கும் வெளிப்படையுண்மைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

கேத்திரகணிதத்தின் தந்தை எனக் கருதப்படும் கி.மு. 300 இல் கிரேக்கத்தில் வாழ்ந்த இயூக்கிலிட்டு என்ற கணிதவியலாளர் தாம் எழுதிய "Elements" என்னும் புத்தகத்தில் கணித பாடத்துடன் தொடர்புபட்ட வெளிப்படையுண்மைகளை முன்வைத்தார். அவற்றில் சில கேத்திரகணிதத்துக்கு விசேடமானவை. ஏனைய வெளிப்படையுண்மைகள் பொதுவானவையானதோடு அவற்றை அட்சரகணித்திலும் ஏனைய பகுதிகளிலும் பயன்படுத்த முடியும். பொதுவான ஐந்து வெளிப்படையுண்மைகளை இப்பாடத்தில் பார்ப்போம்.

இவ்வைந்து வெளிப்படையுண்மைகளைப் பின்வருமாறு சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

(1) ஒரே கணியத்துக்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.
(2) சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(3) சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(4) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(5) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இங்கு ''கணியம்'' என்பதால் கருதப்படுவது நீளம், பரப்பளவு, கனவளவு, திணிவு, கதி, கோணம் போன்றனவாகும்.

இவ்வைந்து வெளிப்படையுண்மைகளையும் பயன்படுத்தி அட்சரகணிதத்திலும் கேத்திரகணிதத்திலும் உள்ள பல பேறுகளைப் பெறமுடியும் என்பதால் அவை மிக முக்கியமானவை. இவற்றை விரிவாகப் பார்ப்போம்.

வெளிப்படையுண்மை 1

ஒரே கணியத்திற்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்

இதனைப் பின்வருமாறு சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

$a = b$

$a = c$

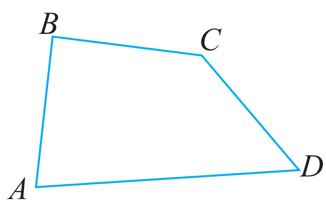
$\therefore\ b = c$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மைக்கேற்ப

"ரவியின் வயது குமாரின் வயதுக்குச் சமம் ஆகவும் ரவியின் வயது கமலின் வயதுக்குச் சமமாகவும் இருப்பின் குமாரின் வயது கமலின் வயதுக்குச் சமமாகும்".

இவ்வெளிப்படையுண்மையைக் கேத்திரகணிதத்தில் பேறுகளைப் பெறுவதற்குப் பயன்படுத்தும் உதாரணம் ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

- கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB = BC,\ AB = CD.$

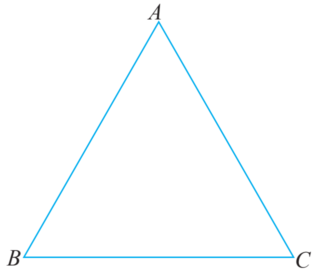


மேலே தரப்பட்டுள்ள வெளிப்படையுண்மைக்கு ஏற்ப,

$BC = CD$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$ உம் $AB = BC$ உம் ஆகும். $AC = 5$ cm எனின், முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.



$AC = 5$ cm ஆகவும் $AC = AB$ ஆகவும் இருப்பதனால் வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப $AB = 5$ cm ஆகும்.

இவ்வாறே $AB = 5$ cm ஆகவும் $AB = BC$ ஆகவும் இருப்பதனால் $BC = 5$ cm ஆகும்.

ஆகவே $\Delta\, ABC$ இன் சுற்றளவு $= AC + BC + AB$

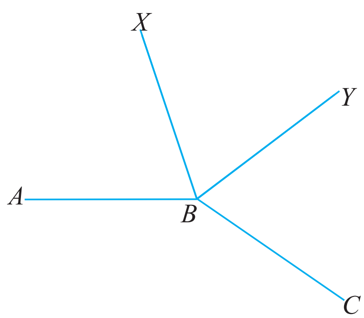
$= 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$

$= 15 \text{ cm}$

$\therefore \Delta\, ABC$ இன் சுற்றளவு 15 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $X\hat{B}Y = A\hat{B}X$ உம் $X\hat{B}Y = C\hat{B}Y$ உம் ஆகும். $A\hat{B}X$ இற்கும் $C\hat{B}Y$ இற்கும் இடையேயான தொடர்பு யாது?



$X\hat{B}Y = A\hat{B}X$ (தரப்பட்டுள்ளது)

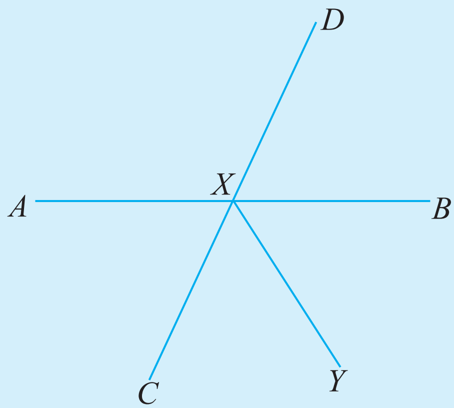
$X\hat{B}Y = C\hat{B}Y$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப

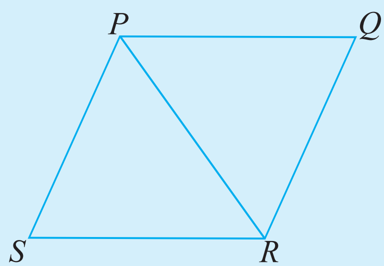
$A\hat{B}X = C\hat{B}Y$ ஆகும்.

பயிற்சி 7.1

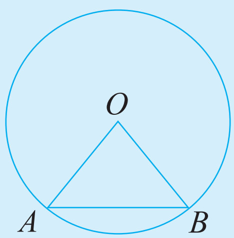
1. AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் X இல் இடைவெட்டுகின்றன. $D\hat{X}B = B\hat{X}Y$ ஆகும். $A\hat{X}C = 70^{\circ}$ எனின், $B\hat{X}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



2. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = PR$, $PQ = PS$ ஆகும். பக்கங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு முக்கோணி PSR எவ்வகை முக்கோணி எனக் கூறுக.



3. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது A, B என்னும் புள்ளிகள் $OA = AB$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. பக்கங்களுக்கு ஏற்ப முக்கோணி ABO எவ்வகை முக்கோணி எனக் கூறுக.



வெளிப்படையுண்மை 2

சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின்,

$a + c = b + c$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை மேலும் விரிவுபடுத்தி எழுதும்போது

$x = y$ ஆகவும் $p = q$ ஆகவும் இருப்பின்,

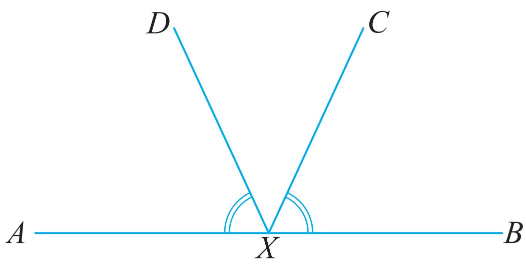
$x + p = y + q$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மைக்கேற்ப

"மரக்கறி வாங்குவதற்குச் செலவான பணம் பால் வாங்குவதற்குச் செலவான பணத்திற்குச் சமனாவதோடு பழம் வாங்குவதற்குச் செலவான பணம் முட்டை வாங்குவதற்குச் செலவான பணத்திற்குச் சமமாகவும் இருப்பின், மரக்கறியும் பழமும் வாங்குவதற்குச் செலவான மொத்தப் பணம் பாலும் முட்டையும் வாங்குவதற்குச் செலவான மொத்தப் பணத்திற்குச் சமனாகும். "

இவ்வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்திப் பெறப்படும் எளிய கேத்திரகணிதப் பேறு ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள AB என்னும் கோட்டில் X என்னும் புள்ளி உள்ளது. $A\hat{X}D = B\hat{X}C$ ஆகும்.



$A\hat{X}D = B\hat{X}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

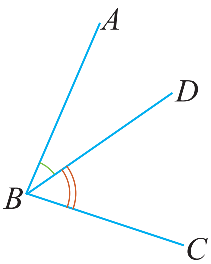
வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப

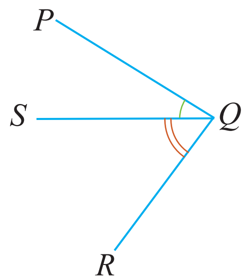
$$\underbrace{A\hat{X}D + C\hat{X}D} = \underbrace{B\hat{X}C + C\hat{X}D}$$

$$A\hat{X}C = B\hat{X}D$$

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் $A\hat{B}D = P\hat{Q}S$ உம் $C\hat{B}D = R\hat{Q}S$ உம் ஆகும்.
$A\hat{B}C = P\hat{Q}R$ எனக் காட்டுக.





$$A\hat{B}D = P\hat{Q}S, \; C\hat{B}D = R\hat{Q}S$$

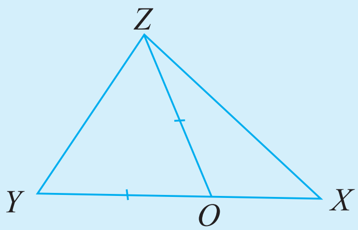
$\therefore$ மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப

$$A\hat{B}D + C\hat{B}D = P\hat{Q}S + R\hat{Q}S$$

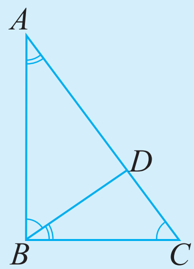
$$\therefore \; A\hat{B}C = P\hat{Q}R$$

பயிற்சி 7.2

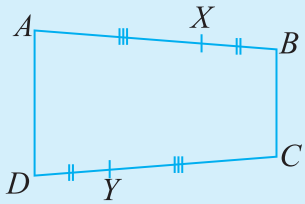
1. முக்கோணி XYZ இன் பக்கம் XY இன் மீது O என்னும் புள்ளியானது $OZ = OY$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. $XY = OZ + OX$ எனக் காட்டுக.



2. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AC இன் மீது D என்னும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. $A\hat{B}D = B\hat{C}D$, $C\hat{B}D = B\hat{A}D$ எனின், $B\hat{A}D + B\hat{C}D = A\hat{B}C$ எனக் காட்டுக.



3. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் பக்கம் AB இன் மீது புள்ளி X உம் பக்கம் CD இன் மீது புள்ளி Y உம் $AX = CY$ ஆகுமாறும் $BX = DY$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன. $AB = CD$ எனக் காட்டுக.



வெளிப்படையுண்மை 3

சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின்,

$a - c = b - c$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை மேலும் விரிவுபடுத்தி எழுதுவோமானால்

$a = b$ ஆகவும் $c = d$ ஆகவும் இருப்பின், $a - c = b - d$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையைப் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய கேத்திரகணிதப் பேறு ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

- கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AD = CB$ ஆகும்.



$$AD = CB$$

வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கேற்ப

$$AD - CD = CB - CD$$

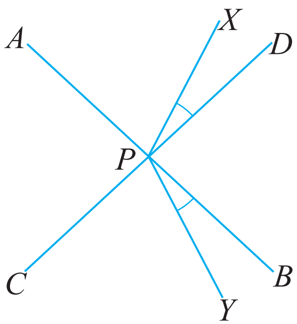
$$\therefore\ AC = DB$$

உதாரணம் 1

AB, CD என்னும் நேர்கோடுகள் P இல் வெட்டுகின்றன. $X\hat{P}D = B\hat{P}Y$ ஆகும்.

(i) $A\hat{P}X = C\hat{P}Y$ எனக் காட்டுக.

(ii) $A\hat{P}D = 70^\circ$, $X\hat{P}D = 20^\circ$ எனின், $C\hat{P}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) $A\hat{P}D = B\hat{P}C$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$X\hat{P}D = B\hat{P}Y$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கேற்ப,

$$\underbrace{A\hat{P}D - X\hat{P}D} = \underbrace{B\hat{P}C - B\hat{P}Y}$$

$$A\hat{P}X = C\hat{P}Y$$

(ii) $A\hat{P}X = A\hat{P}D - X\hat{P}D$

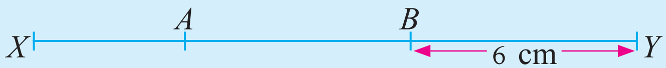
$A\hat{P}X = 70^\circ - 20^\circ$

$A\hat{P}X = 50^\circ$

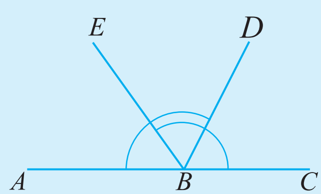
$\therefore C\hat{P}Y = 50^\circ$

பயிற்சி 7.3

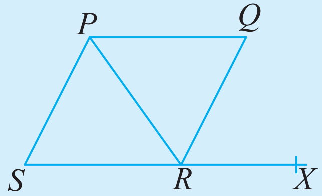
1. நேர்கோடு XY இன் மீது A, B என்னும் புள்ளிகள் $XB = AY$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $XY = 16$ cm, $BY = 6$ cm எனின், AB இன் நீளத்தைக் காண்க.



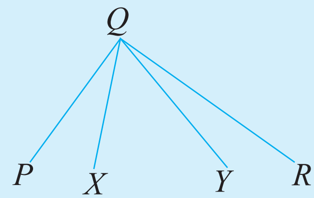
2. நேர்கோடு AC இன் மீது B என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. $A\hat{B}D = C\hat{B}E$ ஆகும். $A\hat{B}E = C\hat{B}D$ எனக் காட்டுக.



3. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $Q\hat{P}S = P\hat{R}X$ உம் $S\hat{P}R = P\hat{R}Q$ உம் எனின், $Q\hat{P}R = Q\hat{R}X$ எனக் காட்டுக.



4. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $P\hat{Q}Y = X\hat{Q}R$ ஆகும். $P\hat{Q}R = 110^{\circ}$, $P\hat{Q}X = 35^{\circ}$ எனின்,
   (i) $R\hat{Q}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (ii) $X\hat{Q}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



வெளிப்படையுண்மை 4

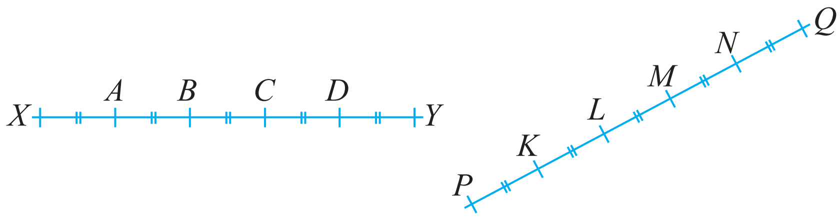
சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின், அப்போது $ac = bc$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையைக் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தைப் பார்ப்போம்.

- உருவில் காட்டப்பட்டவாறு XY என்னும் கோட்டின்மீது $XA = AB = BC = CD = DY$ ஆகுமாறு A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. PQ என்னும் கோட்டின் மீது $PK = KL = LM = MN = NQ$ ஆகுமாறு K, L, M, N ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. மேலும் $XA = PK$ எனின், $XY = PQ$ எனக் காட்டுக.



இங்கு $XY = PQ$ எனப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

முதலில் $XA = AB = BC = CD = DY$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்,

$$XY = XA + AB + BC + CD + DY$$

$\therefore\ XY = 5XA$

இவ்வாறே $PK = KL = LM = MN = NQ$ ஆகையால்

$PQ = PK + KL + LM + MN + NQ$

$\therefore\ XY = 5XA$

ஆனால் $XA = PK$ ஆகையால்

வெளிப்படையுண்மை 4 இற்கு ஏற்ப

$5XA = 5PK$

அதாவது $XY = PQ$ ஆகும்.

வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் பேறுகளை நிறுவும் விதத்தை விளங்கிக் கொள்வது முக்கியம். ஆயினும் பல இடங்களிலும் வெளிப்படையுண்மை பற்றிய விவரத்தைக் குறிப்பிடாது பேறுகளை மாத்திரம் எழுதுவது சாதாரண வழக்கம். அதற்கான காரணம் வெளிப்படையுண்மை என்ற சொல்லிற்கு ஏற்ப, அதனைப் பயன்படுத்தி எழுதும் பேறுகளை அனைவருக்கும் இலகுவாக விளங்கிக்கொள்ள முடியும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை அட்சரகணிதத்தில் பயன்படுத்தும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

$x = 5,\ y = 2x$ எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

$x = 5$ ஆகையால் மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மைக்கு ஏற்ப $2x = 2 \times 5$

மேலும் $2 \times 5 = 10$ மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கு ஏற்ப

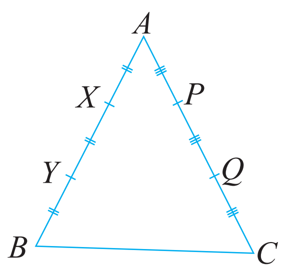
$y = 2x$

$2x = 10$

$\therefore\ y = 10$

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB இன் மீது X, Y என்ற புள்ளிகள் $AX = XY = YB$ ஆகுமாறும் பக்கம் AC இன் மீது P, Q என்ற புள்ளிகள் $AP = PQ = QC$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன. $AX = AP$ எனின் AB, AC என்பவற்றுக்கு இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.



$AX = XY = YB$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore\ AB = 3AX$

$AP = PQ = QC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AC = 3AP$

$AX = AP$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 4 இற்கேற்ப

$3AX = 3AP$

$\therefore AB = AC$

வெளிப்படையுண்மை 5

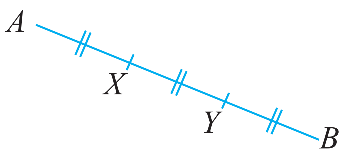
சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

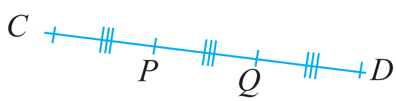
இதனைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின், அப்போது $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ஆகும்.

இங்கு c என்பது பூச்சியமல்லாத ஓர் எண் ஆகும். பூச்சியத்தினால் வகுப்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதால் அச்சந்தர்ப்பங்கள் கருத்திற்கொள்ளப்பட மாட்டா.

- உருக்களில் AB, CD ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்கள் சமம். (அதாவது $AB = CD$) AB இன் மீது $AX = XY = YB$ ஆகுமாறு X, Y என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. CD இன் மீது $CP = PQ = QD$ ஆகுமாறு P, Q என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.





இங்கு, $AX = CP$ என எவ்வாறு காட்டலாம் எனப் பார்ப்போம்.

$AX = XY = YB$ ஆகையால் $\frac{AB}{3} = AX$ ஆகும்.

$CP = PQ = QD$ ஆகையால் $\frac{CD}{3} = CP$ ஆகும்.

$AB = CD$ ஆகையால்

$\frac{AB}{3} = \frac{CD}{3}$

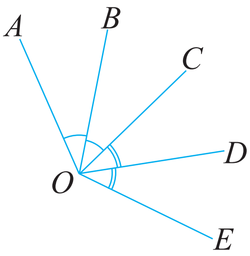
$\therefore AX = CP$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே காணப்படும் உருவில் $A\hat{O}B = B\hat{O}C$, $C\hat{O}D = D\hat{O}E$ ஆகும். $A\hat{O}C = C\hat{O}E$ எனின்,

(i) $A\hat{O}B$, $D\hat{O}C$ என்வற்றுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

(ii) $B\hat{O}C = 35^{o}$ எனின், $D\hat{O}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore A\hat{O}B = \frac{A\hat{O}C}{2}$

$C\hat{O}D = D\hat{O}E$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore D\hat{O}E = \frac{C\hat{O}E}{2}$

$A\hat{O}C = C\hat{O}E$

$\frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{C\hat{O}E}{2}$

$\therefore$ வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப $A\hat{O}B = D\hat{O}E$.

(ii) $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

(வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப)

$\therefore A\hat{O}B = 35^{o}$ ($\because$ $BOC = 35^{o}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{O}B = D\hat{O}E$ (நிறுவப்பட்டுள்ளது)

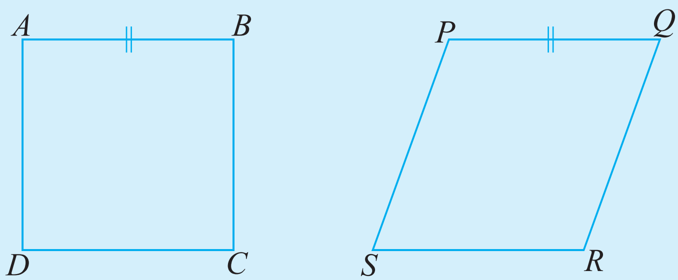
$\therefore D\hat{O}E = 35^{o}$.

பயிற்சி 7.4

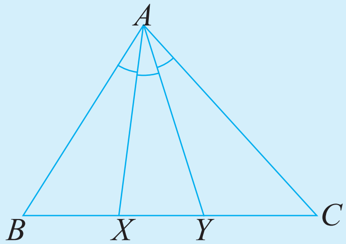
1. சதுரம் $ABCD$, சாய்சதுரம் $PQRS$ என்பவற்றில் $AB = PQ$ ஆகும். வெளிப்படையுண்மை 4 ஐப் பயன்படுத்தி

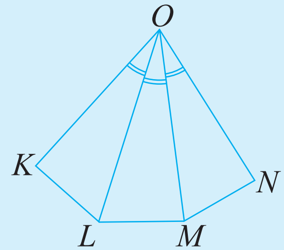
   (i) சதுரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவும் சாய்சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவும் சமம் எனக் காட்டுக.

   (ii) $AB = 7$ cm எனின், சாய்சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

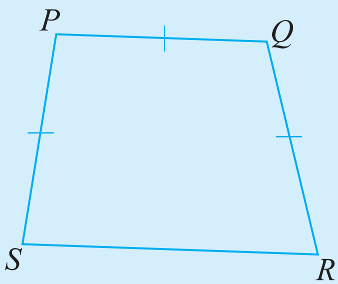


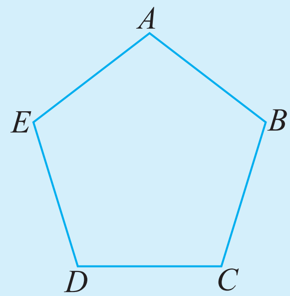
2. உருவில் முக்கோணி ABC இல் $B\hat{A}X = X\hat{A}Y = C\hat{A}Y$ ஆகும். ஐங்கோணி $KLMNO$ இல் $M\hat{O}N = L\hat{O}M = K\hat{O}L$ ஆகும். $B\hat{A}C = K\hat{O}N$ எனின்,
   (i) $X\hat{A}Y = M\hat{O}L$ எனக் காட்டுக.
   (ii) $X\hat{A}Y = 30^{\circ}$ எனின், $K\hat{O}N$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.





3. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = QR = SP$ உம் $2PQ = RS$ உம் ஆகும். ஒழுங்கான ஐங்கோணி $ABCDE$ இன் சுற்றளவு நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் சுற்றளவுக்குச் சமமாகும்.
   (i) PQ இற்கும் AB இற்கும் இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.
   (ii) $AB = 8$ cm எனின், நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.





வெளிப்படையுண்மைகளின் பயன்பாடுகள்

உதாரணம் 1

வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.
$2x + 5 = 13$
சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் என்பது x இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதாகும்.
இங்கு $2x + 5$ என்ற கணியம் 13 என்ற கணியத்திற்குச் சமம். வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கு ஏற்ப இவ்விரண்டு சம கணியங்களிலிருந்தும் 5 ஐக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமம் ஆகையால்,

$2x + 5 - 5 = 13 - 5.$

$2x = 8$

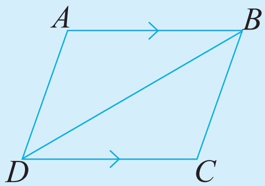
இங்கு $2x$ என்ற கணியம் 8 என்ற கணியத்திற்குச் சமம் எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப இவ்விரு கணியங்களையும் 2 ஆல் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமம் ஆகையால் $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

சுருக்குவதன் மூலம் $x = 4$ எனப் பெறப்படுகின்றது.

எனவே சமன்பாட்டின் தீர்வு 4 ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

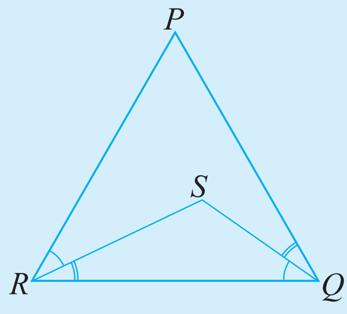
1. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB//CD$, $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ஆகும். வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் நாற்பக்கல் $ABCD$ ஆனது ஓர் இணைகரம் ஆகும் எனக் காட்டுக.



2. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $P\hat{R}S = S\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S = P\hat{Q}S$ ஆகுமாறு S என்னும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம்

(i) $P\hat{R}Q = P\hat{Q}R$ எனக் காட்டுக.

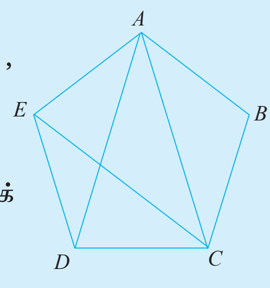
(ii) $R\hat{P}Q = P\hat{R}Q$ எனின், ΔPQR இன் கோணங்கள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனக் காட்டுக.



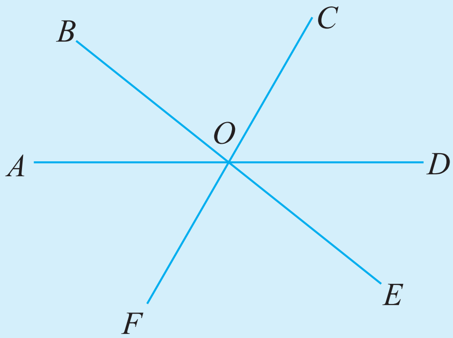
3. ஒழுங்கான ஐங்கோணி $ABCDE$ இல் $E\hat{A}D = D\hat{A}C = B\hat{A}C$, $B\hat{C}A = A\hat{C}E = D\hat{C}E$ ஆகும்.

(i) $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ எனக் காட்டுக.

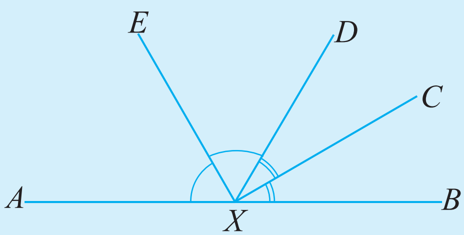
(ii) $B\hat{A}C = 36^{\circ}$ எனின், $C\hat{D}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



4. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு AD, BE, CF என்னும் நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று O என்ற புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. $D\hat{O}E = A\hat{O}F$ எனின், $B\hat{O}D = D\hat{O}F$ எனக் காட்டுக.



5. AB என்ற நேர்கோட்டின் மீது புள்ளி X அமைந்துள்ளது. $A\hat{X}E = E\hat{X}D$, $B\hat{X}C = C\hat{X}D$ ஆகும். $C\hat{X}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பொழிப்பு

பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் 5 வெளிப்படையுண்மைகள்

(1) ஒரே கணியத்துக்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

(2) சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(3) சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(4) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(5) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

8 நேர்கோடுகளுடனும் சமாந்தரக் கோடுகளுடனும் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

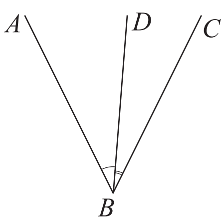
- ஒரு நேர்கோடு வேறொரு நேர்கோட்டினைச் சந்திக்கும்போது அல்லது வேறொரு நேர்கோட்டினை இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களும் மற்றும் குத்தெதிர்க் கோணங்களும் இடம்பெறும் தேற்றங்களை அறிந்துகொள்வதற்கும் அவற்றினை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும் அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- இரு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் கோணங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்களை அறிந்துகொள்வதற்கும் வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும் அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அறிமுகம்

முதலில் கேத்திரகணிதம் தொடர்பாக முன்னைய தரங்களில் கற்ற சில அடிப்படை விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

அடுத்துள்ள கோணங்கள்



- பொது உச்சி காணப்படும்.
  $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் பொது உச்சி உண்டு. அப்பொது உச்சி B ஆகும்.
- பொதுப் புயம் காணப்படும்.
  $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ என்பவற்றுக்குப் பொதுப் புயம் உண்டு. அது BD ஆகும்.
- பொதுப் புயத்தின் இரு புறத்திலும் கோணங்கள் அமைந்திருக்கும்.

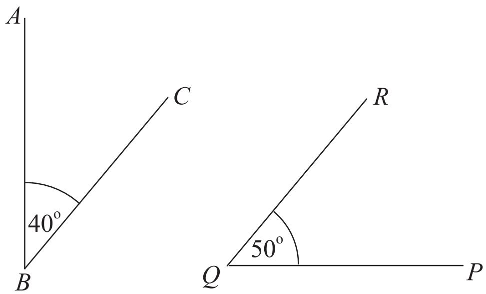
BD இன் இரு புறத்திலும் $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ என்னும் கோணங்கள் அமைந்துள்ளன.

$\therefore A\hat{B}D$ உம் $D\hat{B}C$ உம் ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

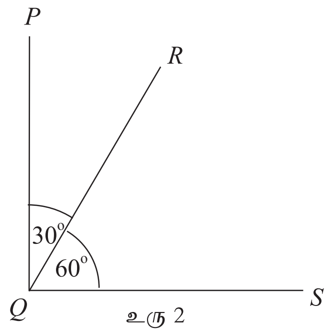
குறிப்பு

ஆனால் $A\hat{B}D$ உம் $A\hat{B}C$ உம் ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியன்று. அதற்குக் காரணம் இவ்விரு கோணங்களும் பொதுப் புயத்தின் இரு பக்கங்களிலும் அமைந்திருக்காமையாகும்.

நிரப்பு கோணங்கள்



உரு 1

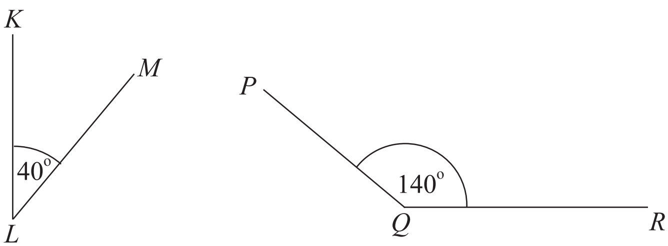


உரு 2

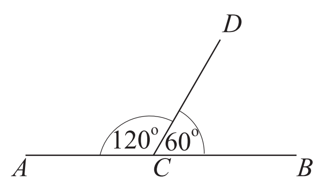
உரு 1 இல் $A\hat{B}C + P\hat{Q}R = 40^{\circ} + 50^{\circ} = 90^{\circ}$ ஆகையால், $A\hat{B}C$, $P\hat{Q}R$ ஆகிய கோணச் சோடி நிரப்பு கோணங்களாகும்.

உரு 2 இல் $P\hat{Q}R$, $R\hat{Q}S$ ஆகியன அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். மேலும் $P\hat{Q}R + R\hat{Q}S = 90^{\circ}$ ஆகையால், அக்கோணச்சோடி நிரப்பு கோணங்களும் ஆகும். எனவே $P\hat{Q}R$, $R\hat{Q}S$ ஆகியன ஒரு நிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

மிகைநிரப்பு கோணங்கள்



உரு 1

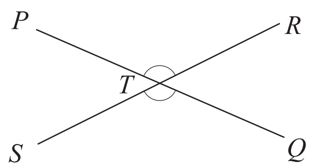


உரு 2

உரு 1 இல் $K\hat{L}M + P\hat{Q}R = 180^{\circ}$ ஆகையால், $K\hat{L}M$, $P\hat{Q}R$ ஆகிய கோணச் சோடி மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

உரு 2 இல் $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். மேலும் $A\hat{C}D + B\hat{C}D = 180^{o}$ ஆகையால், அக்கோணச் சோடி $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஒரு மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள்



PQ, RS ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் T இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் $P\hat{T}R$, $S\hat{T}Q$ ஆகிய கோணச் சோடி குத்தெதிர்க் கோணங்களாகும்.

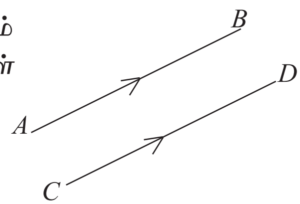
அவ்வாறே $P\hat{T}S$, $R\hat{T}Q$ ஆகியனவும் வேறொரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடியாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் பருமனில் ஒன்றுக்கொன்று சமம்

ஆகவே $P\hat{T}R = S\hat{T}Q$, $P\hat{T}S = R\hat{T}Q$

சமாந்தர நேர்கோடுகள்

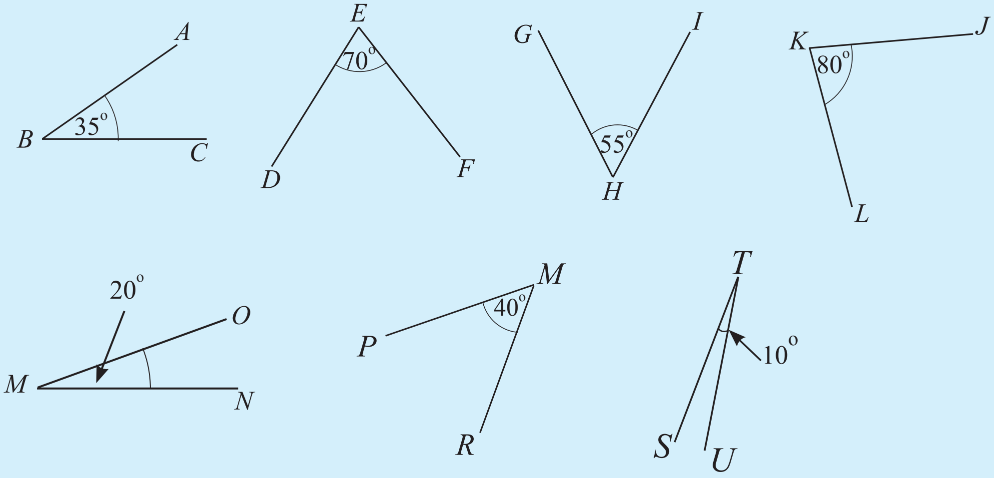
இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயான செங்குத்துத் தூரம் எப்போதும் சமமாக இருப்பின், அவை சமாந்தர நேர்கோடுகள் எனப்படும். இங்கு $AB \,//\, CD$ ஆகும்.



இவ்விடயங்கள் பற்றிய அறிவை மேலும் உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் கோணங்களிலிருந்து நிரப்பு கோணச் சோடிகளைத் தெரிந்து அவை எல்லாவற்றையும் எழுதுக.



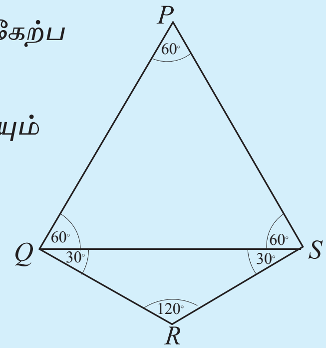
2. உருவில் உள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனுக்கேற்ப

(i) நிரப்பு கோணச் சோடிகள் நான்கையும்

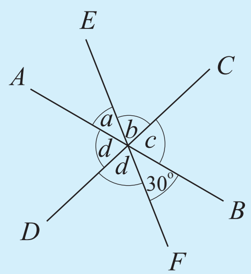
(ii) நிரப்பு அடுத்துள்ள கோணச் சோடிகள் இரண்டையும்

(iii) மிகைநிரப்பு கோணச் சோடிகள் இரண்டையும்

எழுதுக.



3. உருவில் *AB, CD, EF* ஆகிய நேர்க்கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. அதில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப



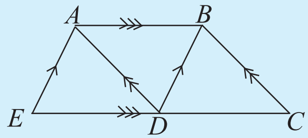
(i) a இன் மூலம் காட்டப்படும் கோணத்தின் பெறுமானத்தைத் தருக.

(ii) $b = d$ ஆக இருப்பதற்குக் காரணத்தைத் தருக.

(iii) d இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

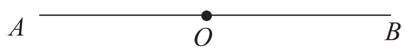
(iv) b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் தருக.

4. உருவில் காணப்படும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகள் 3 தருக.

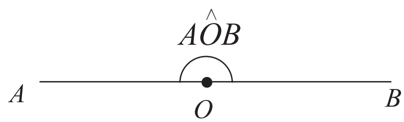


8.1 நேர்கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

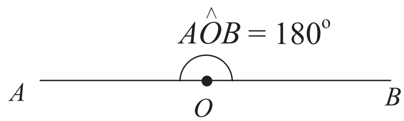
ஒரு நேர்கோடு AB மீது புள்ளி O இருக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.



இப்போது $A\hat{O}B$ ஆனது AO, OB ஆகியவற்றைப் புயங்களாகக் கொண்ட ஒரு கோணமெனக் கருதலாம். அத்தகைய ஒரு கோணம் நேர்கோணம் எனப்படும்.

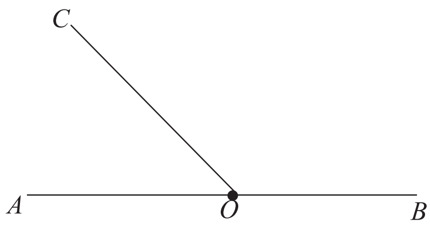


ஒரு நேர்கோணத்தின் பெறுமானம் 180° ஆக இருக்குமாறு கோணங்களை அளப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் பாகை தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றது. ஆகவே $A\hat{O}B = 180^{\circ}$ என எழுதலாம்.



இதற்கேற்ப ஒரு நேர்கோணத்தின் பெறுமானம் 180° ஆகும்.

ஒரு நேர்கோடு AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இல் இரு கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பம் கீழே காணப்படுகின்றது.



இங்கு $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ ஆகிய கோணங்கள் இரண்டும் ஓர் அடுத்துள்ளக் கோணச் சோடியாகும். அத்தகைய ஓர் அமைவில் $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ ஆகிய இரு அடுத்துள்ள கோணங்களும் நேர்கோடு AB மீது இருப்பதாகக் கூறப்படும். மேலும் $A\hat{O}B = 180^{\circ}$ ஆகையால்,

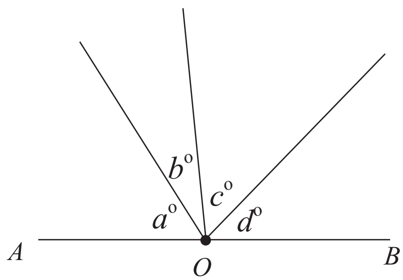
$$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$$

என்பது தெளிவாகும். அதாவது $\hat{AOC}$, $\hat{BOC}$ ஆகிய இரு கோணங்களும் ஒரு மிகைநிரப்பு அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். இங்கு ஆராய்ந்த விடயங்களை பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாகக் காட்டலாம்.

தேற்றம்

ஒரு நேர்கோடு மீது அமைந்திருக்கும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.

மேலே ஆராய்ந்த விடயங்களை மேலும் பொதுவாக எடுத்துரைக்கலாம். ஓர் உதாரணமாக ஒரு நேர்கோடு AB மீது இருக்கும் புள்ளி O இல் நான்கு கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ள சந்தர்ப்பம் கீழே காணப்படுகின்றது.



அக்கோணங்களின் பெறுமானங்கள் பாகைகளில் a, b, c, d எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இத்தகைய ஓர் அமைவில் அக்கோணங்கள் எல்லாம் நேர்கோடு AB மீது உள்ளனவெனக் கூறப்படும். மேலும் $\hat{AOB} = 180^\circ$ ஆகையால்

$$a + b + c + d = 180$$

என்பது தெளிவாகும். கோணங்களின் எவ்வெண்ணிக்கைக்கும் இத்தொடர்புடைமை உண்மையானது என்பது தெளிவாகும். அதாவது

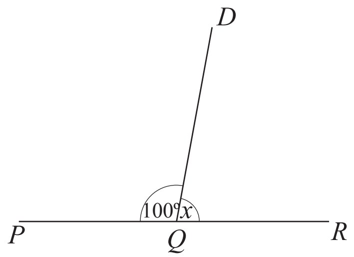
ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்திருக்கும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

இப்போது இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தை உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் PQR ஒரு நேர்கோட்டில் இருப்பின், x இன் மூலம் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i)



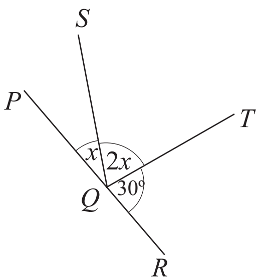
$P\hat{Q}D + D\hat{Q}R = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$100^{\circ} + x = 180^{\circ}$

$x = 180^{\circ} - 100^{\circ}$

$= 80^{\circ}$

(ii)



$P\hat{Q}S + S\hat{Q}T + T\hat{Q}R = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$x + 2x + 30^{\circ} = 180^{\circ}$

$3x + 30^{\circ} = 180^{\circ}$

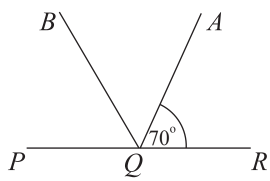
$3x = 180^{\circ} - 30^{\circ}$

$3x = 150^{\circ}$

$x = 50^{\circ}$

உதாரணம் 2

உருவில் $A\hat{Q}R = 70^{\circ}$ உம் $P\hat{Q}A$ இன் இருகூறாக்கி QB உம் ஆகும். $A\hat{Q}B$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



PQR ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$P\hat{Q}A + A\hat{Q}R = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$P\hat{Q}A + 70^{\circ} = 180$

$$\therefore \quad P\hat{Q}A = 180 - 70^{\circ}$$
$$= 110^{\circ}$$

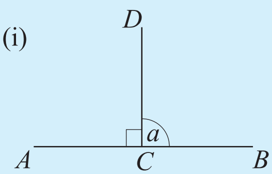
$P\hat{Q}A$ இன் இருகூறாக்கி BQ ஆகையால்,

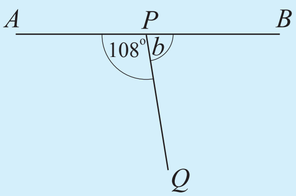
$$P\hat{Q}B = A\hat{Q}B = \frac{1}{2}\, P\hat{Q}A$$

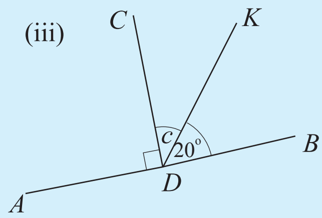
$$\therefore \quad A\hat{Q}B = \frac{110^{\circ}}{2}$$
$$= 55^{\circ}$$

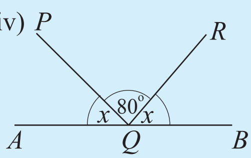
பயிற்சி 8.1

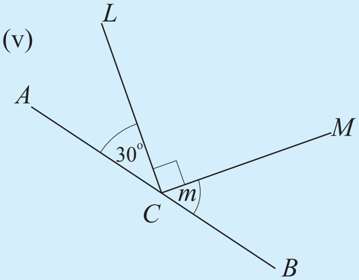
1. கீழே உள்ள உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் இருக்கும் தகவல்களுக்கேற்ப ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

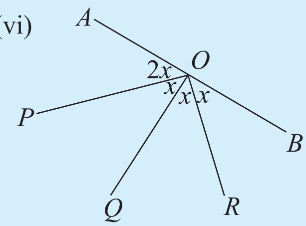
(i)


(ii)


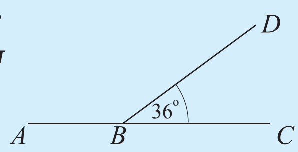
(iii)


(iv)


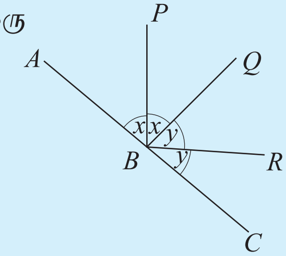
(v)


(vi)


2. உருவில் ABC ஒரு நேர்கோடாகும். $D\hat{B}C = 36^{\circ}$ எனின், $A\hat{B}D$ இன் பெறுமானம் $D\hat{B}C$ இன் பெறுமானத்தின் நான்கு மடங்கெனக் காட்டுக.

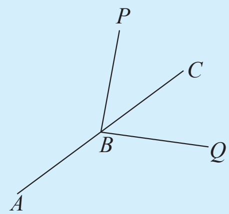


3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $P\hat{B}R$ ஒரு செங்கோணமெனக் காட்டுக.

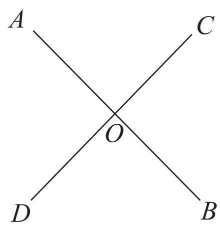


4. உருவில் ABC ஒரு நேர்கோடு. $P\hat{B}C = C\hat{B}Q$ ஆகும்.

$A\hat{B}P = A\hat{B}Q$ எனக் காட்டுக.



8.2 குத்தெதிர்க் கோணங்கள்



உருவில் AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் O இல் ஒன்றையொன்று இடை வெட்டுகின்றன.

இங்கு உச்சி O ஆனது $A\hat{O}C$, $D\hat{O}B$ ஆகிய கோணங்களுக்குப் பொதுவானது. மேலும் அக்கோணங்கள் O இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருக்கின்றன.

இந்த $A\hat{O}C$, $D\hat{O}B$ ஆகிய கோணங்கள் ஒரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடி எனப்படும்.

அவ்வாறே உச்சி O இல் $A\hat{O}D$ உம் அதற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் $B\hat{O}C$ உம் இருக்கும் அதே வேளை உச்சி O அவ்விரு கோணங்களுக்கும் பொதுவானதாகும்.

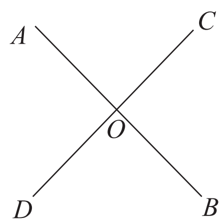
ஆகவே $A\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ ஆகியனவும் ஒரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடியாகும்.

இதற்கேற்ப இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும்போது இரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடிகள் உண்டாகின்றன என்பது தெளிவாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் தொடர்பான ஒரு தேற்றத்தைக் கருதுவோம்.

தேற்றம்
இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

உருவைப் பார்க்கும்போது ''குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்'' என்னும் விடயம் உங்களுக்கு வெளிப்படையாகத் தெரியவரும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. எனினும் நாம் இப்பாடத்தில் மேலே கற்ற ''ஒரு நேர்கோடு மீது உள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்'' என்னும் வெளிப்படையுண்மை பற்றிய அறிவையும் பயன்படுத்தி இத்தேற்றம் முறையாக நிறுவப்படும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.



தரவு: AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.

நிறுவ வேண்டியது: $A\hat{O}C = B\hat{O}D$,

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$

நிறுவல்:

AB ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு AOB மீது உள்ள கோணங்கள்)

அவ்வாறே CD உம் ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$B\hat{O}C + B\hat{O}D = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு COD மீது உள்ள கோணங்கள்)

$\therefore\ A\hat{O}C + B\hat{O}C = B\hat{O}C + B\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை)

இரு பக்கங்களிலிருந்தும் $B\hat{O}C$ ஐக் கழிக்கும்போது

$$A\hat{O}C + B\hat{O}C - B\hat{O}C = B\hat{O}C - B\hat{O}C + B\hat{O}D \text{ (வெளிப்படையுண்மை)}$$

$$A\hat{O}C = B\hat{O}D$$

இவ்வாறே $A\hat{O}D + A\hat{O}C = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு COD மீது உள்ள கோணங்கள்)

$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$ (ஒரு நேர்கோடு AOB மீது உள்ள கோணங்கள்)

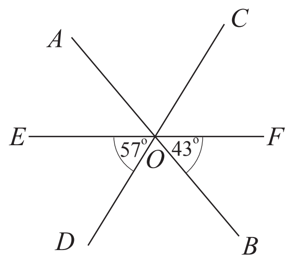
$\therefore$ $A\hat{O}D + A\hat{O}C = A\hat{O}C + B\hat{O}C$ (வெளிப்படையுண்மை)

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் $A\hat{O}C$ ஐக் கழிக்கும்போது

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$

இத்தேற்றம் தொடர்பான பயிற்சியில் ஈடுபடுவதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களில் கவனஞ் செலுத்துக.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள தகவல்களின் மீது காரணங் காட்டி

(i) $D\hat{O}B$ இன் பெறுமானம்

(ii) $A\hat{O}C$ இன் பெறுமானம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) EOF ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்

$E\hat{O}D + D\hat{O}B + B\hat{O}F = 180^{\circ}$ (ஒரு நேர்கோடு மீது உள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$$57^{\circ} + D\hat{O}B + 43^{\circ} = 180^{\circ}$$

$$D\hat{O}B = 180^{\circ} - (57^{\circ} + 43^{\circ})$$

$$= 180^{\circ} - 100^{\circ}$$

$$\therefore \quad D\hat{O}B = 80^{\circ}$$

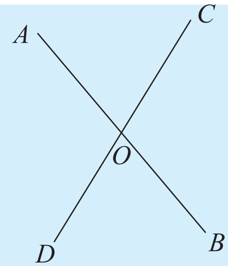
(ii) $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$D\hat{O}B = 80^{\circ}$ (முன்னர் காட்டப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ $A\hat{O}C = 80^{\circ}$

பயிற்சி 8.2

1. உருவில் AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.



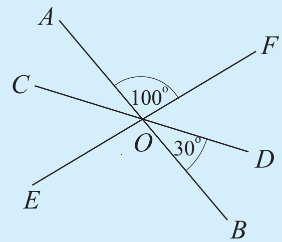
$A\hat{O}C = 80^{\circ}$ எனின்,

(i) $B\hat{O}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $A\hat{O}D$ இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

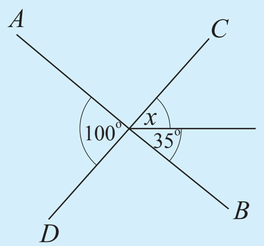
2. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்பப் பின்வரும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $A\hat{O}C$ (ii) $B\hat{O}E$ (iii) $C\hat{O}E$



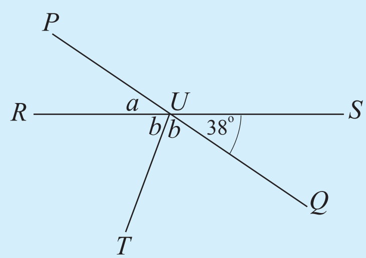
3. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகவல்களிலிருந்து ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்தினால் காட்டப்படும் கோணத்தின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i)



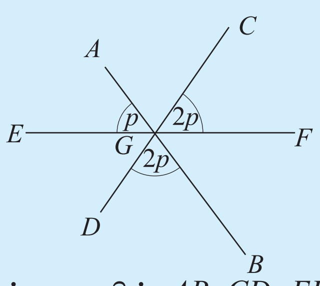
இந்த உருவில் AB உம் CD உம் நேர்கோடுகளாகும்.

(ii)



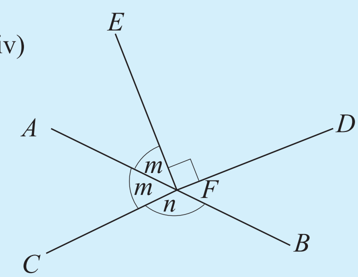
இந்த உருவில் RS உம் PQ உம் நேர்கோடுகளாகும்.

(iii)



இந்த உருவில் AB, CD, EF என்பன நேர்கோடுகளாகும்.

(iv)



இந்த உருவில் AB உம் CD உம் நேர்கோடுகளாகும்.

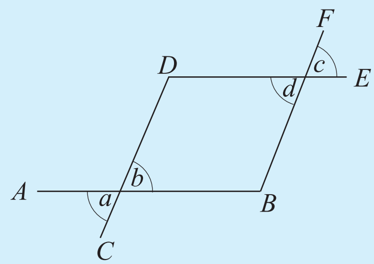
4. உருவில் AB, CD, DE, BF என்பன நேர்கோடுகளாகும். அத்துடன் a, b, c, d ஆகியவற்றினால் காட்டப்படும் கோணங்களில் $a = d$ ஆகும். $b = c$ என நிறுவும் பின்வரும் படிமுறைகளில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

$a = b$ (................)

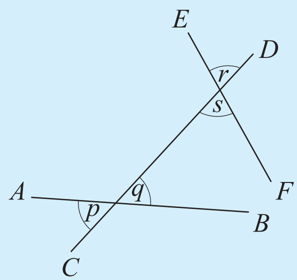
$d =$ ..... (................)

ஆனால் ..... = ... (தரவு)

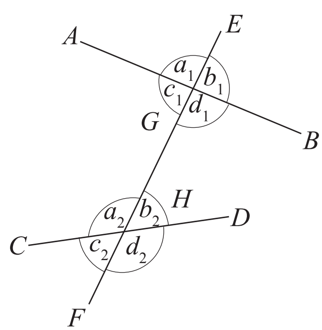
$\therefore \quad b = c$



5. உருவில் AB, CD, FE ஆகியன நேர்கோடுகளாகும். இத்துடன் $p = r$ ஆகும். $s = q$ என நிறுவுக.



8.3 ஒத்த கோணங்கள், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், நேயக் கோணங்கள்



மேலே காட்டப்பட்டுள்ள உருவில் AB, CD என்னும் இரு நேர்கோடுகள் கோடு EF இனால் முறையே G, H ஆகியவற்றில் இடைவெட்டப்படுகின்றன.

இக்கோடு EF ஆனது **குறுக்கோடி** எனப்படும்.

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நேர்கோடுகளை வெட்டுமாறு வரையப்படும் நேர்கோடு **குறுக்கோடி** எனப்படும்.

மேற்குறித்த உருவில் புள்ளி G ஐச் சுற்றி நான்கு கோணங்களும் புள்ளி H ஐச் சுற்றி நான்கு கோணங்களும் உள்ளன. இக்கோணங்கள் இருக்கும் விதத்திற்கேற்ப அவை சோடிகளாக விசேட பெயர்களினால் அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒத்த கோணங்கள்

பின்வரும் நான்கு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) a_1 உம் a_2 உம் (ii) b_1 உம் b_2 உம் (iii) c_1 உம் c_2 உம் (iv) d_1 உம் d_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒத்த கோணச் சோடியாகும். ஒத்த கோணச் சோடியாக இருப்பதற்கு இரு கோணங்களுக்கும் பின்வரும் இயல்புகள் இருத்தல் வேண்டும்.

1. இரு கோணங்களும் ஒரு குறுக்கோடியின் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_1, a_2 மற்றும் c_1, c_2 ஆகிய இரு கோணச் சோடிகளும் குறுக்கோடியின் இடது பக்கத்தில் உள்ளன. அதேபோல் b_1, b_2 மற்றும் d_1, d_2 ஆகிய இரு கோணச் சோடிகளும் குறுக்கோடியின் வலது பக்கத்தில் உள்ளன.

2. இரு கோணங்களும் இரு நேர்கோடுகள் பற்றி ஒரே திசையில் இருத்தல் வேண்டும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_1, a_2 ஆகிய இரு கோணங்களும் மற்றும் b_1, b_2 ஆகிய கோணங்களும் முறையே AB, CD ஆகிய கோடுகளுக்கு மேலே உள்ளன. c_1, c_2 ஆகிய கோணங்களும் மற்றும் d_1, d_2 ஆகிய கோணங்களும் முறையே AB, CD ஆகிய கோடுகளுக்குக் கீழே உள்ளன.

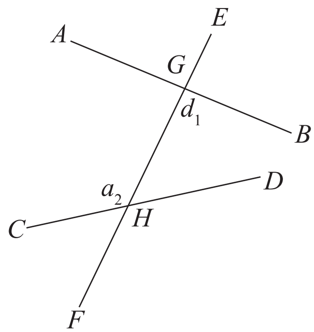
ஆகவே இங்கே காணப்படும் கோணச் சோடிகள்

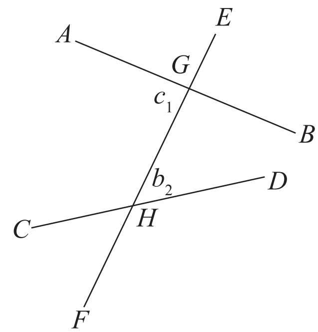
(i) $E\hat{G}B$ உம் $G\hat{H}D$ உம் (ii) $A\hat{G}E$ உம் $C\hat{H}G$ உம்

(iii) $A\hat{G}H$ உம் $C\hat{H}F$ உம் (iv) $B\hat{G}H$ உம் $D\hat{H}F$ உம்

ஒத்த கோணச் சோடிகள் ஆகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்





பின்வரும் இரண்டு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) a_2 உம் d_1 உம்
(ii) c_1 உம் b_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் எனப்படும்.

இக்கோணச் சோடியை இனங்காண்பதற்குள்ள பொது இயல்புகள் பின்வருவனவாகும்.

1. **இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் இருத்தல் வேண்டும்**

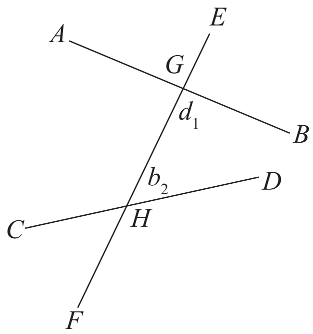
தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_2, d_1 ஆகிய இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ளன. அவ்வாறே c_1, b_2 ஆகிய இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ளன.

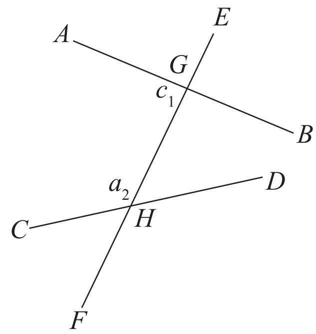
2. **இரு கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள குறுக்கோடித் துண்டம் இரு கோணங் களுக்கும் பொதுப் புயமாக இருத்தல் வேண்டும்.**

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்பக் கோட்டுத் துண்டம் GH ஆனது a_2, d_1 ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் பொதுப் புயமாகும். அவ்வாறே c_1, b_2 ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் GH ஆனது ஒரு பொதுப் புயமாகும்.

ஆகவே இங்கே உருவில் காணப்படும்
(i) $A\hat{G}H$, $G\hat{H}D$ (ii) $B\hat{G}H$, $G\hat{H}C$
ஆகிய கோணச் சோடிகள் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகளாகும்.

நேயக் கோணங்கள்





பின்வரும் இரண்டு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) c_1 உம் a_2 உம்

(ii) d_1 உம் b_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் நேயக் கோணச் சோடியாகும்.

இக்கோணச் சோடியை இனங்காண்பதற்குள்ள பொது இயல்புகள் பின்வருவனவாகும்.

1. **இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.** தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப d_1, b_2 ஆகிய கோணங்கள் GH இன் வலது பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன. c_1, a_2 ஆகிய கோணங்கள் GH இன் இடது பக்கத்தில் அமைந் துள்ளன.

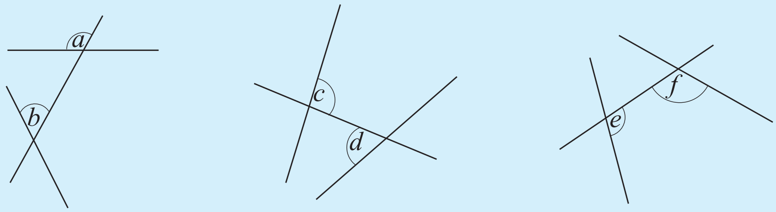
2. **இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது.**

AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகளுக்குமிடையே பொதுப் புயம் GH இன் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கும் கோணச் சோடிகள் நேயக் கோணச் சோடிகள் எனப்படும்.

ஆகவே இங்கே உருவில் காணப்படும்
(i) $A\hat{G}H$, $C\hat{H}G$ (ii) $B\hat{G}H$, $D\hat{H}G$
ஆகிய கோணச் சோடிகள் நேயக் கோணச் சோடிகளாகும்.

பயிற்சி 8.3

1. பின்வரும் உருக்களைக் கருதுக.



உரு 1　　　　உரு 2　　　　உரு 3

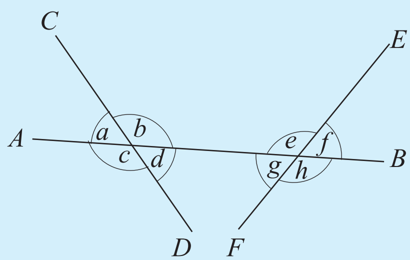
ஒவ்வோர் உருவிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களைக் கருதிப் பின்வரும் வாக்கியங்களில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) உரு 1 இல் a, b ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

(ii) உரு 2 இல் c, d ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

(iii) உரு 3 இல் e, f ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

2. பின்வரும் உருவைக் கருதுக. ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் அவற்றின் கோணங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) உருவில் குறுக்கோடியாக எடுக்கத்தக்க கோட்டினைப் பெயரிடுக.

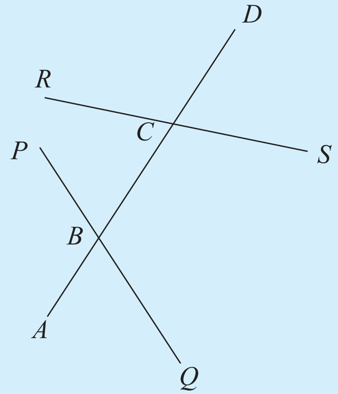
(ii) குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும் இரு நேர்கோடுகளைப் பெயரிடுக.

(iii) ஓர் ஒத்த கோணச் சோடி a, e ஆகும். அவ்வாறே எஞ்சிய மூன்று ஒத்த கோணச் சோடிகளையும் பெயரிடுக.

(iv) இரு நேயக் கோணச் சோடிகளை ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளின் சார்பில் காட்டுக.

(v) இரு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகளை ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளின் சார்பில் காட்டுக.

3. தரப்பட்டுள்ள உரு தொடர்பாகப் பின்வரும் பகுதிகளுக்கு விடை எழுதுக.



(i) $A\hat{B}P$ இற்கு ஒத்த கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(ii) $B\hat{C}S$ இற்கு

(a) நேயக் கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(b) ஒன்றுவிட்ட கோணத்தைப் பெயரிடுக.

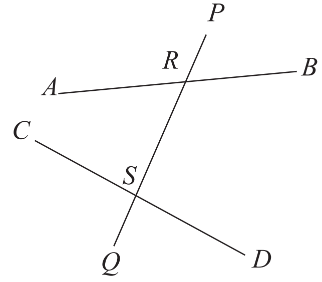
(c) ஒத்த கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(iii) $R\hat{C}D$, $P\hat{B}C$ ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்.

(iv) $P\hat{B}C$, $B\hat{C}R$ ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்.

8.4 சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

உருவில் உள்ளவாறு குறுக்கோடி PQ இனால் AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் முறையே R, S ஆகியவற்றில் இடைவெட்டப்படுகின்றன. அப்போது AB, CD ஆகிய இரு கோடுகளினதும் அமைவைப் பரீட்சிப்போம்.



அதற்காக நாம் பின்வரும் மூன்று சந்தர்ப்பங்களையும் கருதுவோம்.

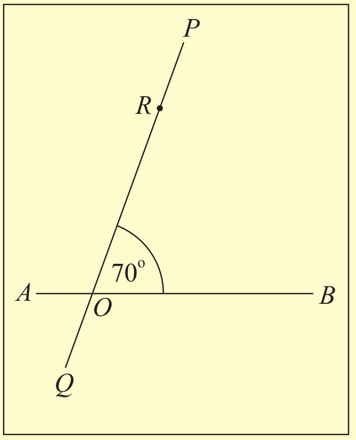
- ⋆ ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது
- ⋆ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது
- ⋆ நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை $180°$ ஆக இருக்கும்போது

இதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

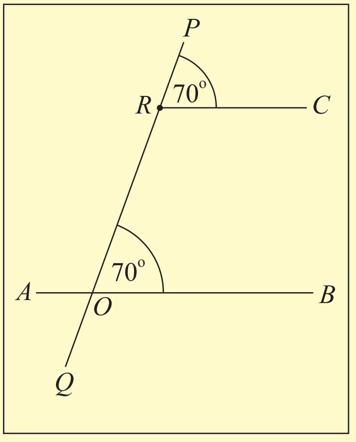
செயற்பாடு 1

வகை I ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது

படி : ஒரு A_4 தாள் மீது உருவில் உள்ளவாறு AB, PQ என்னும் இரு கோடுகளை O இல் இடைவெட்டுமாறும் $P\hat{O}B = 70^{\circ}$ ஆக இருக்குமாறும் வரைக. OP மீது புள்ளி R ஐக் குறிக்க.



படி 2: பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி உருவில் காணப்படுகின்றவாறு புள்ளி R இல் பருமன் 70° ஐ உடைய $P\hat{R}C$ ஐ வரைக. இங்கு $P\hat{O}B$, $P\hat{R}C$ ஆகியன ஓர் ஒத்த கோணச் சோடி என்பதை (RC, AB ஆகிய கோடுகளை இடைவெட்டும் குறுக்கோடியாகக் கோடு PQ ஐக் கருதும்போது) அவதானிக்க.

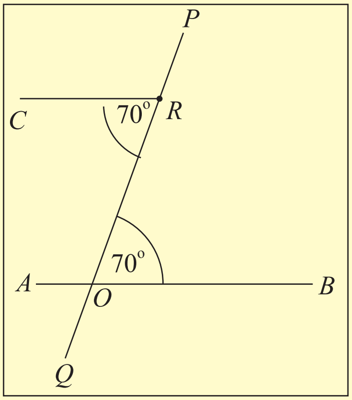


படி 3: ஒரு மூலைமட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

படி 4 : $P\hat{O}B$ இன் பெறுமானத்தை மாற்றி மேற்குறித்த மூன்று படிமுறைகளையும் பல தடவைகள் செய்து மீண்டும் மீண்டும் பார்ப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

வகை II ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது

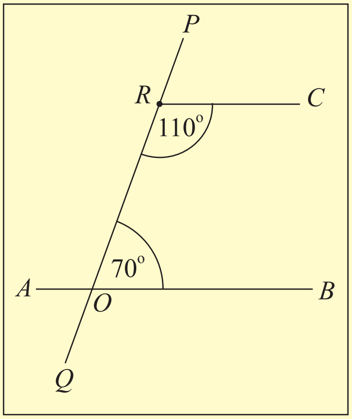
படி 1: மேலே ஒத்த கோணங்களுக்குச் செய்த படிமுறைகளைப் போல ஒன்றுவிட்ட கோணங்களுக்கும் செய்க. அப்படிமுறைகளை நிறைவேற்றும்போது இங்கு காணப் படுகின்றவாறான ஓர் உரு உங்களுக்குக் கிடைக்கும்.



படி 2: ஒரு மூலை மட்டத்தையும் ஒரு நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

வகை III நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்போது

படி 1 : மேற்குறித்த படிமுறைகளில் ஒத்த கோணங்களுக்குச் செய்த படிமுறைகளை நேயக் கோணங்களுக்கும் செய்க. மேலே படிமுறை 2 இல் வரைந்த கோடு RC ஐ, இங்கு உள்ள உருவில் இருக்கின்றவாறு $C\hat{R}O = 180^{\circ} - 70^{\circ} = 110^{\circ}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, வரைதல் வேண்டும்.



படி 2: ஒரு மூலைமட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் நீங்கள்

(i) ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது **அல்லது**
(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது **அல்லது**
(iii) நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருக்கும்போது

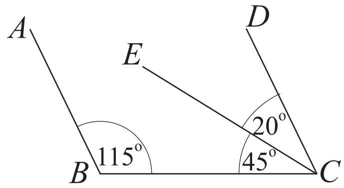
AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமென நீங்கள் அவதானிப்பீர்கள். இப்பேறு பொதுவாக உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

தேற்றம்: இரு நேர்கோடுகள் ஒரு குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும்போது உண்டாகும்

- ஒத்த கோணங்கள் சமனாகும்போது அல்லது
- ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமனாகும்போது அல்லது
- நேயக் கோண்ங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்போது

அவ்விரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும்.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப AB உம் CD உம் சமாந்தரமெனக் காட்டுக. AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் குறுக்கோடி BC இனால் வெட்டப்படும்போது உண்டாகும் $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஒரு நேயக் கோணச் சோடியாகும்.

$$A\hat{B}C = 115^\circ$$

$$B\hat{C}D = B\hat{C}E + E\hat{C}D = 45^\circ + 20 = 65^\circ$$

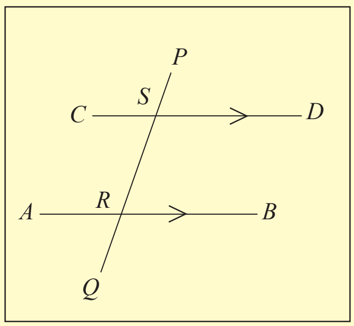
$$\therefore \quad A\hat{B}C + B\hat{C}D = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$$

ABC, BCD ஆகிய நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகையால், AB உம் CD உம் சமாந்தரமாகும்.

சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட வேறொரு தேற்றத்தில் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

செயற்பாடு 2

படி 1 : ஓர் A_4 தாள் மீது உருவில் உள்ளவாறு AB, CD என்னும் இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளையும் (ஒரு மூலை மட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்திச் சமாந்தரக் கோடுகளை வரையலாம்) அவற்றை முறையே R, S ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுமாறு ஒரு குறுக்கோடி PQ ஐயும் வரைக.



படி 2 : ஒரு பாகைமானியைக் கொண்டு

(i) $S\hat{R}B$, $P\hat{S}D$ ஆகிய ஒத்த கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக் கொண்டு அவை சமமாவெனப் பார்க்க. ஏனைய ஒத்த கோணச் சோடிகளையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் சமமாவெனப் பார்க்க.

(ii) $C\hat{S}R$, $S\hat{R}B$ ஆகிய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக் கொண்டு அவை சமமாவெனப் பார்க்க. மற்றைய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் சமமாவெனப் பார்க்க.

(iii) $D\hat{S}R$, $S\hat{R}B$ ஆகிய நேயக் கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக்கொண்டு அவை மிகை நிரப்புகின்றனவாவெனப் பார்க்க. ஏனைய நேயக் கோணச் சோடியையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் மிகைநிரப்பு கின்றனவாவெனப் பார்க்க.

படி 3 : குறுக்கோடி PQ இன் சாய்வை மாற்றிக்கொண்டு மேற்குறித்த இரு படிமுறைகளையும் மறுபடியும் பல தடவைகள் செய்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிலிருந்து இரண்டு சமாந்தரக் கோடுகள் ஒரு குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும்போது நீங்கள் அளந்த

(i) ஒவ்வொரு ஒத்த கோணச் சோடியும் சமம் எனவும்

(ii) ஒவ்வொரு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியும் சமம் எனவும்

(iii) ஒவ்வொரு நேயக் கோணச் சோடியும் மிகைநிரப்புகின்றது எனவும்

அவதானிப்பீர்கள். இப்பேறு பொதுவாக உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

தேற்றம்: இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உருவாகும்

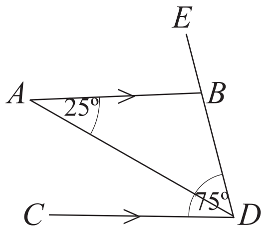
(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

(iii) நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றன.

இத்தேற்றம் மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலையாவென அவதானிக்க.

உதாரணம் 2



மேலே உள்ள உருவில் நேர்கோடுகள் AB, CD என்பன சமாந்தரமாகும். $B\hat{D}C = 75^\circ$ உம் $B\hat{A}D = 25^\circ$ உம் ஆகும்.

(i) $A\hat{B}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. விடைக்குக் காரணத்தைக் காட்டுக.

(ii) $A\hat{D}B$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. விடைக்குக் காரணத்தைக் காட்டுக.

(i) $B\hat{D}C = 75^\circ$ (தரவு)

$B\hat{D}C = A\hat{B}E$ (ஒத்த கோணங்கள், $AB//CD$)

$\therefore \; A\hat{B}E = 75^\circ$

(ii) $B\hat{A}D = 25^\circ$ (தரவு)

$B\hat{A}D = A\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், $AB//CD$)

$\therefore \; A\hat{D}C = 25^\circ$

ஆனால் $A\hat{D}B = B\hat{D}C - A\hat{D}C$

$= 75^\circ - 25^\circ$

$= 50^\circ$

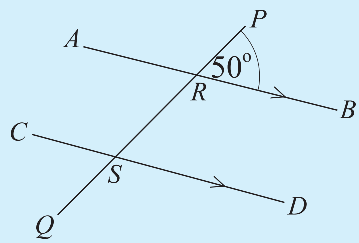
$\therefore \; A\hat{D}B = 50^\circ$

பயிற்சி 8.4

1. உருவில் $AB//CD$ ஆகும். $P\hat{R}B = 50^\circ$ எனின்,

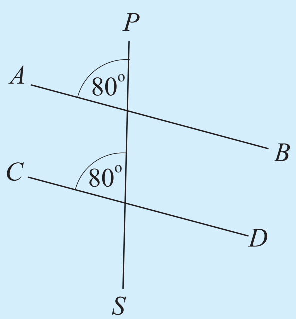
(i) $R\hat{S}D$ (ii) $A\hat{R}S$ (iii) $C\hat{S}Q$ (iv) $Q\hat{S}D$

ஆகியவற்றின் பருமனைக் காண்க.

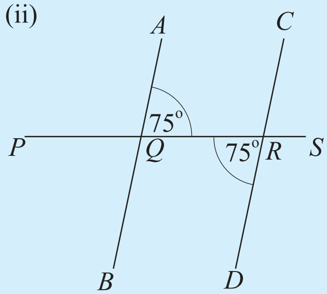


2. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப AB, CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாவெனக் காரணத்துடன் தருக.

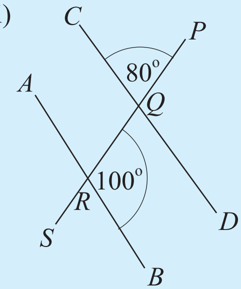
(i)



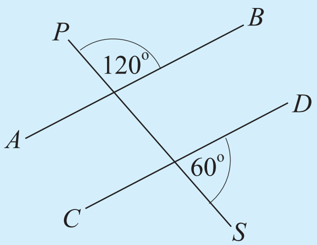
(ii)



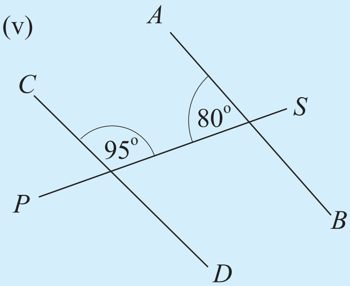
(iii)



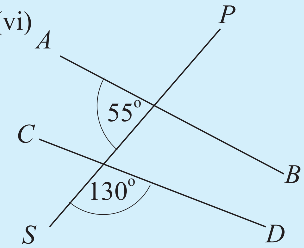
(iv)



(v)

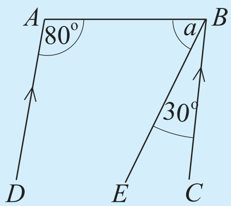


(vi)

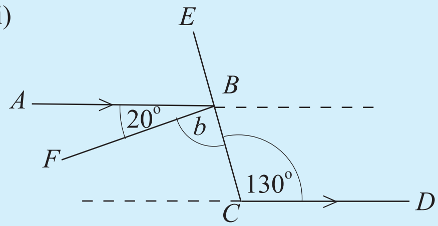


3. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

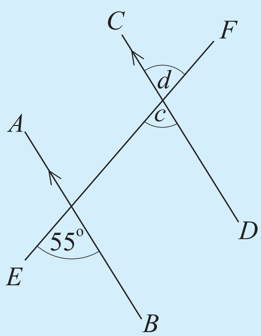
(i)



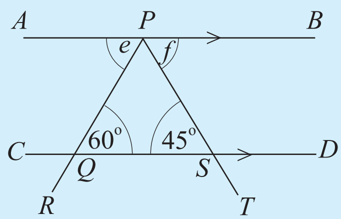
(ii)



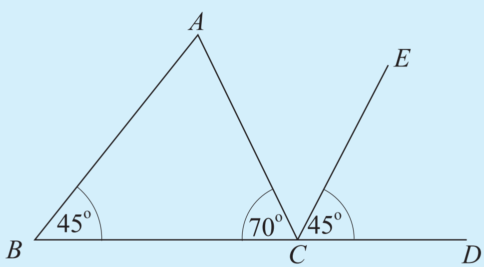
(iii)



(iv)



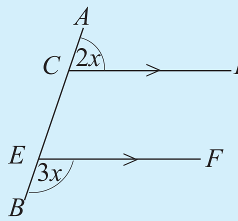
4. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AB//EC$ எனக் காட்டுக.



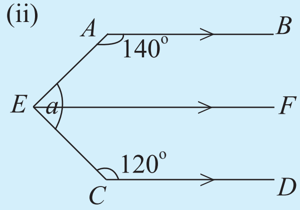
பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

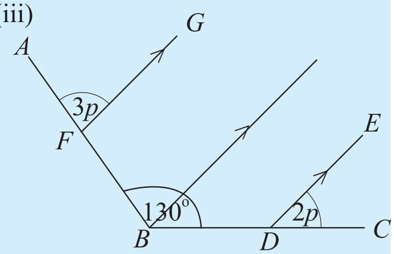
(i)



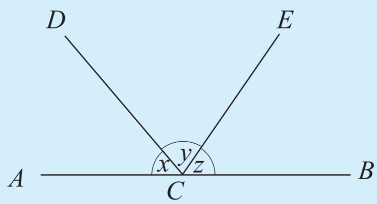
(ii)



(iii)



2. உருவில் x, y, z ஆகியவற்றினால் கோணங்களின் பருமன்கள் காட்டப்படுகின்றன. $x + z = y$ எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

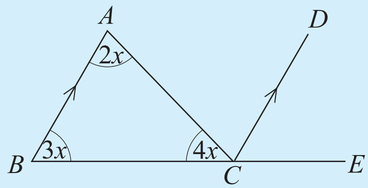


3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

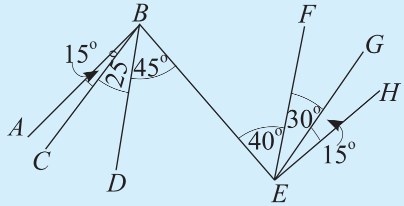
(i) $D\hat{C}E$, $A\hat{C}D$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை x இன் சார்பில் காண்க.

(ii) x இன் மூலம் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

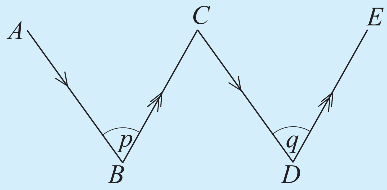
(iii) முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.



4. பின்வரும் உருவில் உள்ள எல்லாச் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளையும் எழுதுக. உங்கள் தெரிவுக்குரிய காரணத்தையும் காட்டுக.



5. உருவில் $A\hat{B}C = p, C\hat{D}E = q$ எனக்காட்டப்பட்டிருக்கும்போது $p = q$ எனக் காட்டுக.



பொழிப்பு

- இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதனால் உருவாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமமாகும்.
- ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.
- இரண்டு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி வெட்டும்போது உண்டாகும்
  - ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமம் எனின் அல்லது
  - ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமம் எனின் அல்லது
  - நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° எனின்

  அவ்விரு நேர்கோடுகளும் சமாந்தரமாகும்.
- இதன் மறுதலை இரண்டு சமாந்தர நேர்கோடுகளைக் குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டும்போது உண்டாகும்
  - ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாகும்.
  - ஒன்றுவிட்ட சோடிகள் சமமாகும்.
  - நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

9 திரவ அளவீடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- திரவக் கனவளவுகள் அளக்கப்படும் அலகுகளாகிய
  ml இற்கும் cm^3 இற்குமிடையே
  l இற்கும் cm^3 இற்குமிடையே
  l இற்கும் m^3 இற்குமிடையே
  உள்ள தொடர்புடைமைகளைக் காண்பதற்கும்
- திரவக் கனவளவுகள் அளக்கப்படும் அலகுகள் இடம்பெறும் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

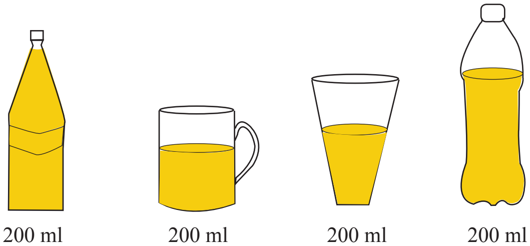
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

9.1 கனவளவும் கொள்ளளவும்

ஒரு குறித்த திண்மம் அல்லது திரவம் வெளியில் எடுக்கும் இடத்தின் அளவானது அத்திண்மத்தின் அல்லது திரவத்தின் கனவளவு எனப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஒரு திண்மத்துக்கு நிலையான வடிவமும் நிலையான கனவளவும் உண்டு. எனினும் ஒரு திரவத்திற்கு நிலையான கனவளவு இருப்பினும் நிலையான வடிவம் இல்லை. திரவம் எப்போதும் தான் கொள்ளப்பட்டிருக்கும் பாத்திரத்தின் வடிவத்தை எடுக்கும் எனக் கற்றுள்ளோம்.

200 மில்லிலீற்றர் அளவுள்ள பானம் வெவ்வேறு வடிவமுள்ள பாத்திரங்களில் இடப்பட்டிருக்கும் விதம் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றது.



அப்பானத்தின் அளவுகள் பல்வேறு வடிவமுள்ள பாத்திரங்களில் இடப்படும்போது அத்திரவத்தின் வடிவம் பாத்திரங்களின் வடிவத்தை எடுக்கின்றபோதிலும் 200 ml என்னும் பானக் கனவளவு மாறுவதில்லை. உருவில் முதலாவது பாத்திரத்தில் உள்ள 200 மில்லிலீற்றர் பானத்தினால் முழுப் பாத்திரமும் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இங்கு அப்பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு 200 மில்லிலீற்றர் எனவும் காட்டலாம். அதாவது ஒரு பாத்திரத்தின் **கொள்ளளவு** என்பது அப்பாத்திரம் கொள்ளக்கூடிய உயர்ந்தபட்சக் கனவளவாகும்.

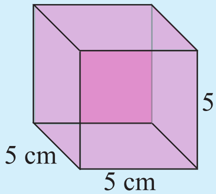
கனவளவையும் கொள்ளளவையும் பற்றி முன்னர் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

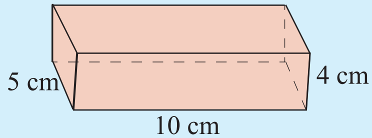
1. 1 l =1000 ml ஆகும். இதனைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

ml	l உம் ml உம்		l இல்
	l	ml	
2500	2	500	2.5
....	3	000	
3500			
....			1.755
....	0	500	
200			
50			
....			3.25
....	0	25	
....			0.005

2. பின்வரும் உருக்களில் உள்ள சதுரமுகியினதும் கனவுருவினதும் கனவளவு கணிக்கப்பட்டுள்ள விதத்திற்கேற்பக் கீழே உள்ள இரு அட்டவணைகளையும் பூரணப்படுத்துக.



கனவளவு $= 5\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 125\text{ cm}^3$



கனவளவு $= 10\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 200\text{ cm}^3$

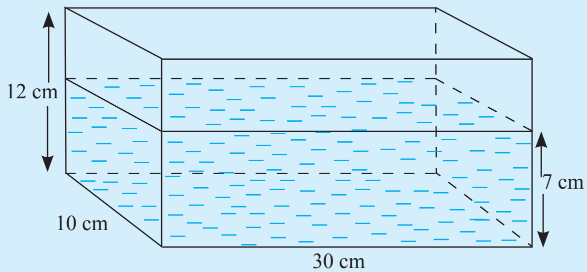
(i) சதுரமுகி

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் (cm)	கனவளவு (cm^3)
2	.... × .... × .... = ...
4	
6	
7	
8	
10	
12	

(ii) கனவுரு

நீளம் (cm)	அகலம் (cm)	உயரம் (cm)	கனவளவு (cm^3)
3	2	2	... × ... × ... = ...
5	3	4	
8	6	5	
10	5	10	
10	5	6	
12	10	8	
12	6	5	
15	8	10	
20	7	8	

3. உருவில் உள்ள பாத்திரத்தின் உள் நீளம் 30 cm, அகலம் 10 cm, உயரம் 12 cm ஆகும். அதில் 7 cm உயரத்துக்கு நீர் இடப்பட்டுள்ளது.



பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு

(ii) பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்பத் தேவையான நீரின் கனவளவு

(iii) பாத்திரத்தில் 7 cm உயரத்திற்கு மாத்திரம் நீர் இடப்பட்டிருப்பின், அந்நீரின் கனவளவு

(iv) பாத்திரத்தில் 7 cm உயரத்திற்கு நீர் இருக்கும்போது கசிவு காரணமாக ஒரு மணித்தியாலத்தில் நீர் மட்டத்தின் உயரம் 5 cm இற்கு இறங்கினால் அம்மணித்தியாலத்தில் கசிந்த நீரின் கனவளவு.

9.2 கன சென்ரிமீற்றருக்கும் மில்லிலீற்றருக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை



மருத்துவர்கள் பயன்படுத்தும் சிவிறி (Syringe) மேலேயுள்ள உருவில் காணப்படுகின்றது. ஒரு நோயாளிக்கு ஏற்றப்படும் திரவ மருந்தின் அளவை அதில் உள்ள அளவிடையைப் பயன்படுத்தி இனங்காணலாம்.

அதில் cc/ ml என அளவீட்டு அலகுகள் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும்.

cc என்பது கன சென்ரிமீற்றர் ஆகும். அது ஆங்கிலத்தில் cubic centimetre எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றமையால் அவ்விரு பதங்களினதும் முதலெழுத்துகளைக் கொண்டு cc பெறப்பட்டுள்ளது. ஒரு கன சென்ரிமீற்றர் என்பது நீளம் 1 சென்ரிமீற்றராக உள்ள ஒரு சதுரமுகிப் பாத்திரத்தின் கனவளவவாகும்.

இங்கு சாய்ந்த கோடு / ஆனது ''அல்லது'' என்பதைக் கருதுகின்றது. அதாவது மருந்தின் அளவை cc அல்லது ml எனக் காட்டலாம் என்பதாகும். அப்போது ஒரு கன சென்ரிமீற்றர் என்பது ஒரு மில்லிலீற்றருக்குச் சமமா என்னும் வினா எம்மிடம் எழுகின்றது. உண்மையில் மெட்ரிக் அலகு முறையில் ஒரு மில்லிலீற்றரின் அளவானது ஒரு கன சென்ரிமீற்றரின் அளவுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கேற்ப

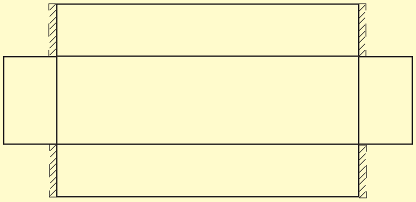
1 கன சென்ரிமீற்றர் = 1 மில்லிலீற்றர்.

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

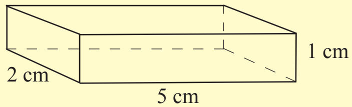
இவ்விடயங்கள் பற்றி மேலும் அறிவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1

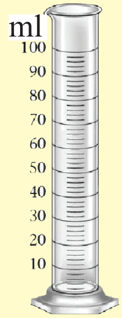
படி 1 - மெல்லிய பிளாத்திக்கு தாள் (file cover), வரைகோல், அளவுச் சாடி, செலோரேப் என்பவற்றைப் பெற்றுக் கொள்க.



கனவுரு ஒன்றின் வலை



10 cm^3 கனவளவுள்ள கனவுரு



அளவுச் சாடி

படி 2 - உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள அளவுகளை உடைய கனவுரு ஒன்றைச் செய்வதற்கான மாதிரியை வரைந்து வெட்டிக் கொள்க.

படி 3 - வெட்டியெடுத்த மாதிரியைக் கொண்டு 5 cm × 2 cm × 1 cm அளவுள்ள கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்தைத் தயார் செய்க. (நீர் கசியாதவாறு விளிம்புகளை உகந்தவாறு செலோரேப்பினால் அல்லது பிசினால் நன்றாக ஒட்டுக.)

படி 4 - ஆய்கூடத்திலிருந்து 100 ml அளவுள்ள ஓர் அளக்கும் சாடியைப் பெற்றுக் கொள்க.

படி 5 - பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தினால் அளக்கும் சாடிக்குள்ளே நீர் இடப்படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை	அளக்கும் சாடியில் இடப்படும் நீரின் கனவளவு	
	கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்திற்கேற்ப cm^3 இல்	அளக்கும் சாடிக்கேற்ப ml இல்
	10 20 30 40 50	

படி 6 - கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்தை நீரால் நிரப்பி அதனை அளவு சாடியினுள் இடுவதன் மூலம் அதன் வாசிப்பைப் பெறுக.

படி 7 - இதனைப் பல தடவைகள் செய்வதன் மூலம் வாசிப்புகளைக் குறித்துக் கொள்க.

இதிலிருந்து பாத்திரத்தின் கனவளவையும் சாடியில் உள்ள நீரின் கனவளவையும் கொண்டு cm இற்கும் ml இற்கும் இடையே ஒரு தொடர்பைப் பெறுக.

செயற்பாட்டிற்கேற்ப,

$10\ cm^3 =$ அளக்கும் சாடியின் 10 ml
$20\ cm^3 =$ அளக்கும் சாடியின் 20 ml

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore 1\ cm^3 = 1\ ml$$

பாத்திரங்களில் அடங்கும் திரவக் கனவளவுகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

உள் நீளம் 20 cm, அகலம் 15 cm, உயரம் 10 cm ஆகவுள்ள கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு கண்ணாடிப் பாத்திரத்தில் ஒரு வகை மருந்துத் திரவம் உள்ளது.

(i) பாத்திரத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.

(ii) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு லீற்றரில் யாது?

(iii) பாத்திரத்தில் அடங்கும் மருந்துத் திரவம் 50 ml வீதம் சிறிய போத்தல்களில் இடப்படுமெனின், முழு மருந்துத் திரவத்தையும் அவ்வாறு இடுவதற்குத் தேவையான சிறிய போத்தல்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) பாத்திரத்தின் கனவளவு $= 20\ cm \times 15\ cm \times 10\ cm$
$= 3000\ cm^3$

(ii) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 3000\ ml$
$= 3\ l$

(iii) முழு மருந்துத் திரவத்தினதும் அளவு $= 3000\ ml$
50 ml வீதம் இடப்படத்தக்க சிறிய
போத்தல்களின் எண்ணிக்கை $= 3000 \div 50$
$= 60$

உதாரணம் 2

அடியின் நீளம் 2 m ஆகவும் அகலம் 1 m ஆகவும் இருக்கும் ஒரு கனவுரு வடிவமுள்ள கொங்கிறீற்றுத் தொட்டியில் 800 l நீர் இடப்பட்டுள்ளது. தொட்டியில் எவ்வளவு உயரத்துக்கு நீர் உள்ளதெனக் காண்க.

தொட்டியில் x சென்ரிமீற்றர் உயரத்திற்கு நீர் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம் நீர் இருக்கும் உயரத்தைக் காண்போம்.

அதற்காக எல்லா அளவீடுகளையும் சென்ரிமீற்றருக்கு மாற்றுவோம்.

தொட்டியின் நீளம் = 2 m = 200 cm
தொட்டியின் அகலம் = 1 m = 100 cm

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு = 800 l
= 800 000 ml
= 800 000 cm^3

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு = 200 cm × 100 cm × x cm

$$20\,000 \times x = 800\,000$$

$$x = \frac{800\,000}{20\,000}$$

$$= 40 \text{ cm}$$

∴ தொட்டியில் 40 cm உயரத்திற்கு நீர் உள்ளது.

பயிற்சி 9.1

1. அடைப்பு A இல் உள்ள கனவளவுக்குச் சமமான கனவளவை அடைப்பு B இலிருந்து தெரிந்தெடுத்து இணைக்க.

A	B
1000 cm^3	25 ml
10 cm^3	25 l
3000 cm^3	1 l
1500 cm^3	10 ml
25000 cm^3	1.5 l
25 cm^3	3 l

2. கனவுரு வடிவமுள்ள சில பாத்திரங்களின் அளவுகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அவ்வட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

நீளம் (cm)	அகலம் (cm)	உயரம் (cm)	கொள்ளளவு		
			cm^3	ml	l
20	10	5			
40	20	10			
35	12	10			
50	35	12			
40	35	25			
25	20	18			

3. அடியின் பரப்பளவு 240 cm^2 ஆன கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் 12 cm உயரத்துக்கு நீர் உள்ளது. நீரின் கனவளவை
(i) கன சென்ரிமீற்றர் (ii) மில்லிலீற்றர் (iii) லீற்றர்
ஆகியவற்றில் காண்க.

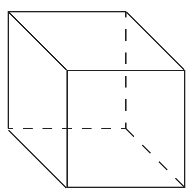
4. சதுர வடிவமுள்ள அடியைக் கொண்ட ஒரு பாத்திரத்தின் அடியின் பரப்பளவு 225 cm^2 ஆகும். அதில் 3.6 l நீர் இடப்பட்டுள்ளது.
   (i) நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.
   (ii) பாத்திரத்தின் உயரம் 24 cm எனின், அதன் கொள்ளளவின் $\frac{2}{3}$ இல் நீர் இருக்குமெனக் காட்டுக.

5. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகி வடிவப் பாத்திரம் திரவத்தினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அப்பாத்திரத்தினால் 15 தடவைகள் அத்திரவத்தை இடுவதன் மூலம் 15 l கொள்ளளவுள்ள ஒரு பீப்பாவை நிரப்பலாமெனக் காட்டுக.

9.3 லீற்றரும் கன மீற்றரும்

எண்ணெய் சேமித்து வைக்கப்படும் பெரிய தாங்கிகள், நீச்சல் தடாகங்கள் போன்றவற்றில் பெரிய திரவக் கனவளவைச் சேகரிக்கும்போது அந்த அளவைக் குறிப்பிடுவதற்கு ml, l போன்ற அலகுகள் போதியனவல்ல. அதற்குக் கன மீற்றர் என்னும் பெரிய அலகு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

கன மீற்றரை இனங்காண்பதற்கு ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 1 m ஆகவுள்ள சதுரமுகி வடிவமுள்ள ஒரு தாங்கியின் கொள்ளளவைக் கணிப்போம்.



உருவில் உள்ள பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ஆகையால்

பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$

$= 1\,000\,000 \text{ cm}^3$

$1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ ml}$ ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ ஆகையால்)

$100\,000 \text{ ml} = \frac{1000\,000}{1000} \text{ l}$ ($1000 \text{ ml} = 1 \text{ l}$ ஆகையால்)

$= 1\,000 \text{ l}$

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$

இதற்கேற்ப

ஒரு கன மீற்றர் என்பது 1 000 l கனவளவாகும்.

உதாரணம் 1

ஒரு வீட்டில் தினமும் பயன்படுத்தத் தேவையான நீர் சேகரிப்படும் கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியின் உள் நீளம் 1.5 m, அகலம் 1 m, உயரம் 1 m ஆகும்.

(i) தொட்டியின் கொள்ளளவு எத்தனை லீற்றர்?

(ii) வீட்டில் வசிப்பவர்கள் தினமும் 300 லீற்றர் நீரை நுகர்வார்களெனின், முற்றாக நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ள தொட்டியில் உள்ள நீர் அவர்களுக்கு எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

(i) தொட்டியின் கொள்ளளவு $= 1.5\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$

$= 1.5\text{ m}^3$

$= 1\,500\text{ l}$ ($1\text{ m}^3 = 1000\text{ l}$ என்பதால்)

(ii) ஒரு நாளுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் நீரின் கனவளவு $= 300\text{ l}$

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு $= 1\,500\text{ l}$

$\therefore$ போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{1\,500}{300}$

$= 5$ நாட்கள்

பயிற்சி 9.2

1. அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

கனவுரு வடிவமுள்ள தொட்டியின் உள் அளவுகள்			தொட்டியின் கொள்ளளவு	
நீளம் (m)	அகலம் (m)	உயரம் (m)	m^3	l
2	2	1	.....	.....
2	1.5	1	.....	.....
1	1	0.5	.....	.....
4	.....	.....	8	.....
.....	1.5	.....	.....	9000
.....	.....	1	1.5	.....

2. ஒரு நீச்சல் தடாகத்தின் நீளம் 50 m, அகலம் 25 m, ஆழம் 3 m ஆகும்.

(i) நீச்சல் தடாகத்தின் கொள்ளளவைக் காண்க.

(ii) தடாகத்தில் 1.2 m உயரத்திற்கு நீர் இருப்பின், அதில் உள்ள நீரின் கனவளவு எத்தனை லீற்றர்?

(iii) நீச்சல் தடாகத்தில் முற்றாக நீர் நிரம்புவதற்கு மேலும் எவ்வளவு நீர் தேவை?

3. கொள்ளளவு 6.5 m^3 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஓர் எண்ணெய் பவுசரில் முற்றாக எண்ணெய் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இந்த பவுசர் 8 எண்ணெய் நிரப்பும் நிலையங்களுக்கு ஒன்றுக்கு 850 l வீதம் எண்ணெயை வழங்க வேண்டியுள்ளது. பவுசரில் தேக்கி வைக்கப்பட்டுள்ள எண்ணெயின் அளவு அந்த 8 நிலையங்களுக்கும் வழங்கப் போதுமானதா? உமது விடைக்குக் காரணங்களைத் தருக.

4. ஒரு நாளுக்கு ஒருவருக்குக் குறைந்தபட்சம் 150 l நீர் தேவை. உள் நீளம் $1\frac{1}{2}$ m, அகலம் 1 m, உயரம் 1 m அளவுள்ள கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியில் நீர் நிரம்பியிருப்பின், அந்நீர் எத்தனை பேருக்கு ஒரு நாளுக்குப் போதும்?

5. சதுரமுகி வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியின் உள் நீளம் 1 m ஆகும். இத் தொட்டியில் முற்றாக நீர் நிரம்பியுள்ளது. தொட்டியிலிருந்து நீரை வெளியேற்றும் திருகுபிடியைத் திறக்கும்போது அதிலிருந்து நீர் நிமிடத்துக்கு 50 l என்னும் சீரான வீதத்தில் வெளியேறுகின்றது. இச்சீரான கதியில் இத்திருகுபிடியைத் திறந்து எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பின்னர் தொட்டியில் உள்ள நீர் முற்றாக வெறிதாகுமெனக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு பெரிய அளவுள்ள பழப் பானப் போத்தலின் கொள்ளளவு 1.5 l ஆகும். ஒரு விழாவில் இப்பானத்தை வழங்குவதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு சிறிய அளவிலான குவளையில் 150 ml பானத்தை இடுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விழாவிற்கு 225 பேர் அழைக்கப்பட்டிருப்பின், அவர்களை உபசரிக்கத் தேவையான பெரிய அளவிலான பானப் போத்தல்களின் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. வீடுகளில் நீரைத் தேக்கி வைக்கும் நீர்த் தாங்கிகள் 500 l, 1000 l, 2000l அளவுகளில் சந்தைகளில் விற்கப்படுகின்றன. ஐந்து பேரைக் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தின் தலைவர் ஒருவர் தனது வீட்டுக்குத் தேவையான நீரைச் சேகரித்து வைப்பதற்கு ஒரு நீர்த் தாங்கியைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு உத்தேசித்துள்ளார். ஒரு நாளுக்கு ஒருவருக்கு உயர்ந்தபட்சம் 150 l நீர் தேவையாக இருக்கும் அதே வேளை வீட்டில் ஏனைய பணிகளுக்கு 200 l நீர் மேலதிகமாகத் தேவை எனத் தீர்மானிக்கும் தலைவர் ஒரு நாளுக்கு ஒரு தடவை மாத்திரம் தாங்கியில் நீரை நிரப்புவதற்கு உத்தேசித்துள்ளார். இத்தீர்மானங்களுக்கேற்ப இவ்வீட்டுக்கு எத்தாங்கி உகந்ததெனத் துணிக.

பொழிப்பு

- 1 cm^3 கனவளவு 1 ml திரவக் கனவளவுக்குச் சமம்
- 1 l ஆனது 1000 cm^3 ஆகும்.
- 1 கன மீற்றர் என்பது 1000 லீற்றர் ஆகும்.

மீட்டற் பயிற்சி I
பகுதி I

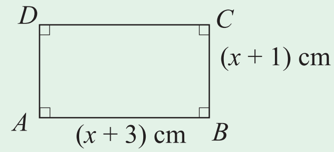
1. 5, 8, 11, 14, ... என்னும் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பைக் காண்க.

2. $10011_{\text{இரண்டு}} - \dots\dots_{\text{இரண்டு}} = 11_{\text{இரண்டு}}$ எனின், கீறிட்ட இடத்தை நிரப்புக.

3. குறித்த ஒரு தொகைப் பணத்தின் $\frac{1}{3}$ இன் பெறுமானம் ரூ. 800 ஆகும். அத்தொகையின் $\frac{3}{4}$ இன் பெறுமானம் எவ்வளவு?

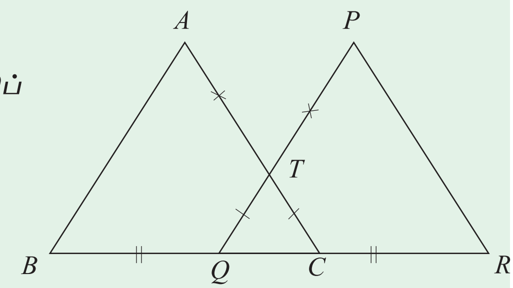
4. ஒரு பொருள் ரூ. 1 500 இற்கு விற்கப்படுவதால் ரூ. 300 இலாபமாகக் கிடைக்கின்றதெனின், இலாபச் சதவீதம் எவ்வளவு?

5. செவ்வகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவை x இன் சார்பில் காண்க.

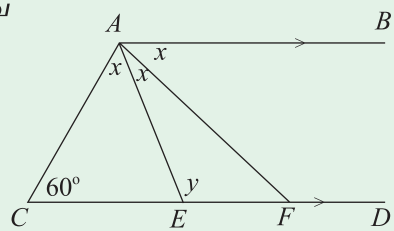


6. $x^2 - x - 6$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

7. தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்தி
(i) $AC = PQ$ எனவும்
(ii) $BC = QR$ எனவும்
காட்டுக.

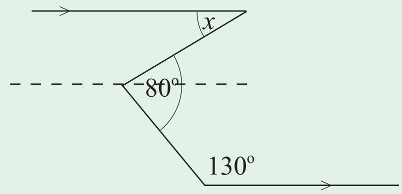


8. AB, CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

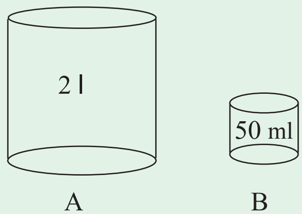


9. $(x + 4)(x - 3) = x^2 + bx + c$ எனின், b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10. x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



11. 2 l கொள்ளளவுள்ள பாத்திரம் A இன் $\frac{3}{4}$ இல் நீரை இடுவதற்கு 50 ml கொள்ளளவுள்ள பாத்திரம் B இனால் எத்தனை தடவைகள் நீரை ஊற்ற வேண்டும்?



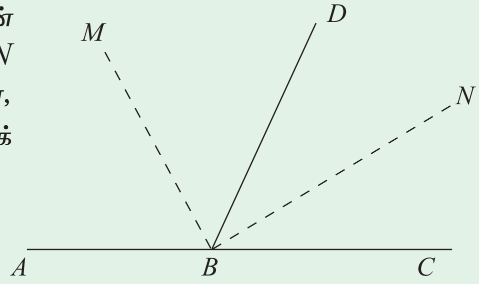
12. காணி ஒன்றை விற்கும்போது 3% தரகுப் பணம் அறவிடப்படுகின்றது. தரகுப் பணம் செலுத்தப்பட்டபின்னர் உரிமையாளருக்கு 4 850 000 ரூபாய் கிடைத்ததெனின், காணி என்ன விலைக்கு விற்கப்பட்டது?

13. $1\frac{3}{4}$ ஐ என்ன பின்னத்தினால் பெருக்கும்போது $3\frac{3}{4}$ கிடைக்கும்?

14. கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

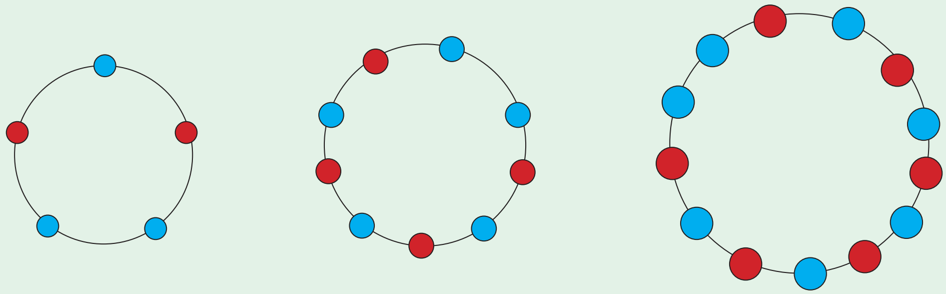
$$\begin{array}{r} 1101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\ 101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

15. $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ ஆகிய கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் முறையே BM, BN ஆகும். ABC ஒரு நேர்கோடு எனின், $A\hat{B}M + C\hat{B}N$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பகுதி II

1. நீல நிற மின் குமிழ்கள் 3, 5, 7 ஆகவும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்கள் 2, 4, 6 ஆகவும் இருக்கும் விதத்தில் மின் குமிழ்களைக் கொண்டு வளையங்களாக உருவாக்கப்பட்ட அலங்கார அமைப்பு ஒன்றின் முதல் மூன்று சந்தர்ப்பங்களும் இங்கு தரப்பட்டுள்ளன.



(i) நான்காம் ஐந்தாம் சந்தர்ப்பங்களில் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக் கையையும் முறையே எழுதிக் காட்டுக.

(ii) இங்கே பயன்படுத்தியிருக்கும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையும் வெளிப்படுத்தும் கோலத்தை இனங்கண்டு n ஆம் சந்தர்ப்பத்துக்குத் தேவையான நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் n மூலம் தனித்தனியே குறிக்க.

(iii) மேலே (ii) இல் பெற்ற எண் கோலத்தைக் கொண்டு 10 ஆம் சந்தர்ப்பத்தை உருவாக்கத் தேவையான நீல நிற, சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையைத் தனித்தனியே காண்க.

(iv) மின் குமிழ்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 61 ஆக இருப்பது எத்தனையாவது கோலத்தில் ஆகும்? அதில் காணப்படும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

2. (a) சுருக்குக.

(i) $\dfrac{2\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{10}}$

(ii) $(1\frac{1}{3}$ இன் $1\frac{1}{8}) \div 2\frac{1}{2}$

(b) (i) காணி ஒன்றின் $\frac{1}{4}$ இல் மாமரங்கள் நடப்பட்டுள்ளனவெனின், எஞ்சிய காணியின் அளவு எவ்வளவு ?

(ii) எஞ்சிய காணியின் $\frac{1}{3}$ இல் வாழை மரங்கள் நடப்பட்டிருப்பின் வாழை மரங்கள் நடப்பட்ட காணியின் அளவு முழுக்காணியின் என்ன பின்னமாகும் ?

(iii) மா, வாழை ஆகியன நடப்பட்ட காணியின் அளவு முழுக் காணியின் என்ன பின்னம் ?

(iv) மேலே குறிக்கப்பட்ட மரங்கள் நடப்படாத காணியின் அளவு 8 ஹெக்ரெயர் எனின், மொத்தக் காணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

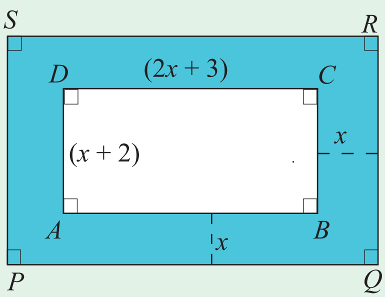
3. (a) ரூ. 8 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருள் ஒன்று 25% இலாபத்துடன் விலை குறிக்கப்படுகின்றது. அது உடன் பணத்துக்கு விற்கப்படும்போது 10 % கழிவு வழங்கப்படுகிறது எனின், வியாபாரி அடையும் இலாபச் சதவீதம் எவ்வளவு ?

(b) நபர் ஒருவர் பொருள் ஒன்றை 15% இலாபத்துடன் விலை குறிக்கிறார். அதனை 20% இலாபத்துடன் விற்றாரெனின், மேலதிகமாக ரூ. 200 ஐப் பெற்றிருக்கலாம். அவ்வாறெனின், அப்பொருளின் கொள்விலையையும் விற்ற விலையையும் காண்க.

4. (a) $a = (-\frac{1}{2})$, $b = \frac{2}{3}$ ஆக இருக்கும்போது தரப்பட்ட கோவைகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $2a + 3b$ (ii) $b - 2a$ (iii) $\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$

(b) செவ்வகம் $ABCD$ யின் நீளம் $(2x + 3)$ cm உம் அகலம் $(x + 2)$ cm உம் ஆகும்.



(i) $ABCD$ யின் பரப்பளவுக்கான கோவையை x சார்பில் தருக.

(ii) $ABCD$ ஐச் சுற்றி x cm அகலமுள்ள ஒரு கீலம் ஒட்டப்பட்டுச் செவ்வகம் $PQRS$ உருவாக்கப்படுகின்றது. நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) $x = 3$ cm எனின், நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

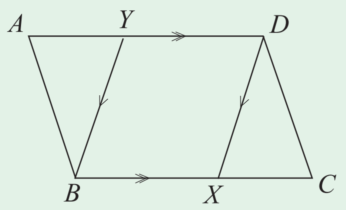
(c) காரணிகளைக் காண்க.

(i) $5x^2 + 12y - 4xy - 15xy^2$ (ii) $6(x - 1) + 3x - 3$

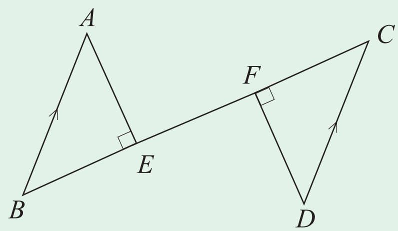
(iii) $t^2 - 8t + 15$ (iv) $3k^2 - 12k$

5. (a) வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு பின்வரும் உருக்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கிணங்க வினவப்பட்டுள்ளவற்றைப் பெறுக.

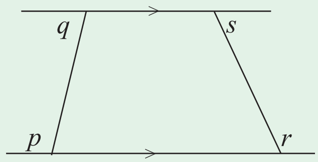
(i) $A\hat{Y}B = D\hat{X}C$ எனக் காட்டுக.



(ii) $B\hat{A}E = F\hat{D}C$ எனக் காட்டுக.

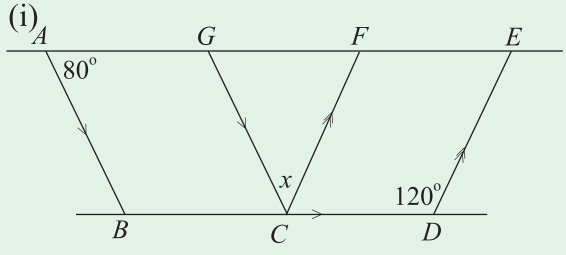


(iii) $\hat{p} - \hat{s} = \hat{r} - \hat{q}$ எனக் காட்டுக.

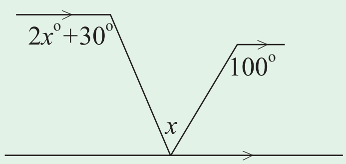


(b) தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i)



(ii)



(c) PQ, RS என்னும் சமாந்தரக் கோடுகள் MN, KL என்னும் குறுக்குக்கோடிகளால் இடைவெட்டப்படுகின்றன. தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு

(i) கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} ஆகும் எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களையும் எழுதிக் காட்டுக.

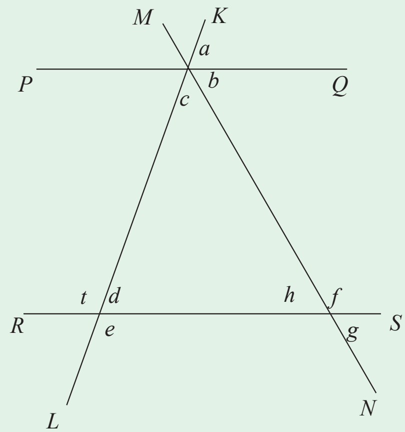
(ii) நேயக் கோணச் சோடிகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(iii) b, g ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்?

(iv) $\hat{a} + \hat{e} = 180^{o}$ ஆகுமா? விளக்குக.

(v) வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு $t - f = h - d$ எனக் காட்டுக.

(vi) $e = 140^{o}$, $f = 110^{o}$ எனின், ஆங்கில எழுத்துகள் குறிக்கும் பெறுமானங்களைத் தனித்தனியே காண்க.



6. ஒரு வீட்டின் நீர்த் தொட்டியின் நீளம், அகலம், உயரம் என்பன முறையே 2 m, 1.5 m, 1 m ஆகும்.

(i) இந்நீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவை லீற்றரில் தருக.

(ii) குறித்த நபர் ஒருவருக்கு நாள் ஒன்றிற்கு 150 l நீர் தேவைபடுகின்றதெனின், நால்வர் குடியிருக்கும் ஒரு வீட்டுக்கு நாள் ஒன்றுக்குத் தேவைப்படும் நீரின் அளவு எத்தனை லீற்றர்?

(iii) மேற்குறித்த நீர்த் தொட்டியில் உள்ள மொத்த நீரின் அளவு நால்வருக்கும் எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

(iv) வெற்றுத் தொட்டியை நிரப்புவதற்கு நிமிடத்துக்கு 100 l நீர் வழங்கும் குழாய் மூலம் தொட்டிக்கு நீர் வழங்கப்படுகின்றதெனின், தொட்டி நிரப்புவதற்கு எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்?

(v) தொட்டி முற்றாக நிரம்பியிருந்த நாள் ஒன்றில் அதில் ஏற்பட்ட கசிவு ஒன்றின் காரணமாக 900 l நீர் வெளியேறிவிட்டது. இப்போது எஞ்சியுள்ள நீர் தொட்டியில் என்ன உயரத்திற்குக் காணப்படும்?

கலைச் சொற்கள்

அ

அட்சரகணித உறுப்பு	වීජීය පද	Algebraic term
அட்சரகணிதக் கோவைகள்	වීජීය ප්‍රකාශන	Algebraic expressions
அடி	පාදය	Base
அடைப்பு	වරහන්	Brackets

இ

இடப் பெறுமானம்	ස්ථානීය අගය	Place Value
இலாபம்	ලාභය	Profit

ஈ

ஈருப்புக் கோவைகள்	ද්විපද ප්‍රකාශන	Binomial expressions

உ

உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம்	පද අතර වෙනස	Difference of terms

எ

எண் தொடரி	සංඛ්‍යා අනුක්‍රම	Number sequence

ஒ

ஒத்த கோணங்கள்	අනුරූප කෝණ	Corresponding angles
ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்	ඒකාන්තර කෝණ	Alternate angles

க

கழிவு	වට්ටම	Discount
கழித்தல்	අඩු කිරීම	Subtraction
கனவளவு	පරිමාව	Volume
குத்தெதிர்க் கோணங்கள்	ප්‍රතිමුඛ කෝණ	Vertically opposite angles
குறித்த விலை	ලකුණු කළ මිල	Marked Price
கூட்டல்	එකතු කිරීම	Addition
கொள்ளளவு	ධාරිතාව	Capacity

த		
தரகர்	තැරැව්කරුවා	Broker
தரகு	කොමිස්	Commission
தசம எண்கள்	දශම සංඛ්‍යා	Decimal Numbers
துவித எண்கள்	ද්වීමය සංඛ්‍යා	Binary numbers
தேற்றம்	ප්‍රමේයය	Theorem
ந		
நிறைவெண்கள்	නිඛිල	Integers
நேயக் கோணங்கள்	මිත්‍ර කෝණ	Allied angles
ப		
பின்னங்கள்	භාග	Fractions
பொது உறுப்பு	සාධාරණ පදය	General term
பொதுக் காரணி	පොදු සාධක	Common factors
ம		
மறுதலை	විලෝමය	Converse
மாற்றம்	පරිවර්තනය	Conversion
முதலாம் உறுப்பு	පළමුවන පදය	1^{st} term
வ		
வலு	බලය	Power
விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு	විද්‍යාත්මක අංකනය	Sciencetific notation
விற்ற விலை	විකුණුම් මිල	Selling Price

கற்பித்தல் தொடரொழுங்கு

உள்ளடக்கம்	தேர்ச்சி மட்டம்	பாடவேளைகளின் எண்ணிக்கை
முதலாந் தவணை		
1. எண் கோலங்கள்	2.1	3
2. துவித எண்கள்	1.3	3
3. பின்னங்கள்	3.1	5
4. சதவீதம்	5.1	6
5. அட்சரகணிதக் கோவைகள்	14.1, 14.2	5
6. அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்	15.1, 15.2	5
7. வெளிப்படையுண்மைகள்	23.1	4
8. நேர்கோடுகள், சமாந்தரக்கோடுகள் தொடர்பான கோணங்கள்	21.1, 21.2, 21.3	7
9. திரவ அளவீடு	11.1	3
		41
இரண்டாம் தவணை		
10. நேர் விகிதசமன்	4.1	6
11. கணிகருவி	6.2	2
12. சுட்டிகள்	6.1	3
13. மட்டந்தட்டலும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடும்	1.1, 1.2	5
14. ஒழுக்குகளும் அமைப்புகளும்	27.1, 27.2	9
15. சமன்பாடுகள்	17.1, 17.2	6
16. முக்கோணியொன்றின் கோணங்கள்	23.2, 23.3	9
17. சூத்திரங்கள்	19.1	2
18. வட்டமொன்றின் பரிதி	7.1	5
19. பைதகரசின் தொடர்பு	23.5	4
20. வரைபுகள்	20.1	4
		55
மூன்றாம் தவணை		
21. சமனிலிகள்	18.1	3
22. தொடைகள்	30.1	7
23. பரப்பளவு	8.1	5
24. நிகழ்தகவு	31.1	5
25. பல்கோணிகளின் கோணங்கள்	23.4	5
26. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	16.1	3
27. அளவிடைப் படங்கள்	13.1, 13.2	8
28. தரவுகளை வகைகுறித்தலும் விளக்கம் கூறலும்	28.1, 29.1	10
		46
		142